

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie
Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1

- a) Eine injektive Abbildung ist beispielsweise gegeben durch $f_1: M \rightarrow N$, $2 \mapsto 2, 4 \mapsto 4, 7 \mapsto 8$. Nicht injektiv ist etwa $f_2: M \rightarrow N$, $2 \mapsto 2, 4 \mapsto 2, 7 \mapsto 8$. Beide Abbildungen sind nicht surjektiv. Surjektive Abbildungen und damit auch bijektive Abbildungen von M nach N gibt es nicht, weil N mehr Elemente als M enthält.

Aus dem gleichen Grund existiert keine injektive Abbildung von N nach M . Ist beispielsweise $g_1: N \rightarrow M$, $2 \mapsto 2, 4 \mapsto 2, 8 \mapsto 2$ und $9 \mapsto 7$, so ist g_1 nicht surjektiv. Definiert man z.B. $g_2: N \rightarrow M$ durch $2 \mapsto 2, 4 \mapsto 2, 8 \mapsto 4$ und $9 \mapsto 7$, dann ist g_2 surjektiv.

- b) f ist injektiv, denn für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow \frac{x+4}{x-3} = \frac{y+4}{y-3} \\ &\Rightarrow (x+4)(y-3) = (y+4)(x-3) \\ &\Rightarrow xy - 3x + 4y - 12 = yx - 3y + 4x - 12 \\ &\Rightarrow 7y = 7x \quad \Rightarrow \quad x = y. \end{aligned}$$

f ist nicht surjektiv, denn $1 \notin f(\mathbb{R} \setminus \{3\})$. Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ gilt nämlich

$$f(x) = \frac{x-3+3+4}{x-3} = 1 + \frac{7}{x-3}.$$

Wegen $\frac{7}{x-3} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ folgt $f(x) \neq 1$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Also gibt es kein $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ mit $f(x) = 1$, d.h. $1 \notin f(\mathbb{R} \setminus \{3\})$.

Aufgabe 2

- a) f_1 ist injektiv, denn für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ gilt

$$f_1(x) = f_1(y) \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

f_1 ist auch surjektiv. Um dies zu begründen, müssen wir zeigen, dass es zu jedem $y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ein $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ gibt mit $f_1(x) = y$. Sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Ist $x := y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ gesetzt, so gilt $f_1(x) = y$.

Da f_1 sowohl injektiv als auch surjektiv ist, ist f_1 bijektiv. Daher existiert die Umkehrfunktion $f_1^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ von f_1 . Zur Berechnung von f_1^{-1} lösen wir die Gleichung $f_1(x) = y$ nach x auf (hier sind $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, y \in f_1(\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$): $f_1(x) = y \Leftrightarrow x = y$. Also ist $f_1^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, f_1^{-1}(y) = y$.

Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ gilt

$$f_2(x) = 1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1-x+x}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

f_2 ist injektiv, denn für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ergibt sich

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad x-1 \neq y-1 \quad \xrightarrow{x, y \neq 1} \quad \frac{1}{x-1} \neq \frac{1}{y-1} \quad \Rightarrow \quad f_2(x) \neq f_2(y).$$

f_2 ist auch surjektiv: Sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Für $x := 1 - \frac{1}{y} \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ gilt

$$f_2(x) = \frac{1}{1 - (1 - \frac{1}{y})} = \frac{1}{1 - 1 + \frac{1}{y}} = y.$$

Insgesamt haben wir gezeigt, dass f_2 bijektiv ist und daher die Umkehrfunktion f_2^{-1} existiert. Dem Beweis der Surjektivität von f_2 entnehmen wir $f_2^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $f_2^{-1}(y) = 1 - \frac{1}{y}$.

Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ gilt $f_3(x) = 1 - \frac{1}{x} = f_2^{-1}(x)$. Also sind f_3 und f_2^{-1} identisch. Da f_2^{-1} bijektiv ist, gilt das selbe auch für f_3 . Außerdem ergibt sich $f_3^{-1} = f_2$.

- b) Da f_1 die Identität auf $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ist, gilt $f_1 \circ f_k = f_k$ für alle $k \in \{1, 2, 3\}$ und $f_j \circ f_1 = f_j$ für alle $j \in \{1, 2, 3\}$. Ferner erhalten wir wegen $f_2 = f_3^{-1}$ und $f_3 = f_2^{-1}$ für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$$\begin{aligned}(f_3 \circ f_2)(x) &= f_3(f_2(x)) = f_3(f_3^{-1}(x)) = x = f_1(x), \\ (f_2 \circ f_3)(x) &= f_2(f_3(x)) = f_2(f_2^{-1}(x)) = x = f_1(x),\end{aligned}$$

d.h. $f_3 \circ f_2 = f_1$ und $f_2 \circ f_3 = f_1$. Übrigens erkennen wir für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$$(f_2 \circ f_2)(x) = f_2(f_2(x)) = \frac{1}{1 - f_2(x)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{1-x-1} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} = f_3(x),$$

$$(f_3 \circ f_3)(x) = f_3(f_3(x)) = 1 - \frac{1}{f_3(x)} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1 - \frac{x}{x-1} = \frac{x-1-x}{x-1} = \frac{1}{1-x} = f_2(x),$$

d.h. $f_2 \circ f_2 = f_3$ und $f_3 \circ f_3 = f_2$.

Bemerkung für Hörer der Ergänzungen für Studierende der Physik: Wir haben gezeigt, dass $(\{f_1, f_2, f_3\}, \circ)$ eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 3

- a) Zuerst begründen wir, dass f tatsächlich nach $[a, b]$ abbildet. Für jedes $x \in [0, 1]$ gilt

$$f(x) = xb + (1-x)a = a + x \underbrace{(b-a)}_{>0} \begin{cases} \leq a + 1 \cdot (b-a) = b \\ \geq a + 0 \cdot (b-a) = a \end{cases}$$

Also ist $f(x) \in [a, b]$ für alle $x \in [0, 1]$.

f ist injektiv, denn für alle $x, y \in [0, 1]$ gilt

$$\begin{aligned}f(x) = f(y) &\Rightarrow xb + (1-x)a = yb + (1-y)a \\ &\Rightarrow xb + a - xa = yb + a - ya \\ &\Rightarrow x(b-a) = y(b-a) \\ &\stackrel{a \neq b}{\Rightarrow} x = y.\end{aligned}$$

f ist surjektiv: Sei $y \in [a, b]$. Zum Nachweis der Surjektivität von f müssen wir ein $x \in [0, 1]$ angeben mit $f(x) = y$. Definiere $x := \frac{y-a}{b-a}$. Wegen

$$a \leq y \leq b \quad \Rightarrow \quad 0 \leq y - a \leq b - a \quad \stackrel{b-a > 0}{\Rightarrow} \quad 0 \leq \frac{y-a}{b-a} \leq 1$$

ist $x \in [0, 1]$. Ferner gilt für dieses x

$$f(x) = xb + (1-x)a = x(b-a) + a = \frac{y-a}{b-a}(b-a) + a = y - a + a = y.$$

Da $y \in [a, b]$ beliebig war, folgt $f([0, 1]) = [a, b]$, d.h. die Surjektivität von f .

Außerdem haben wir eben die Umkehrfunktion von f bestimmt. Diese lautet

$$f^{-1}: [a, b] \rightarrow [0, 1], \quad f^{-1}(y) := \frac{y-a}{b-a}.$$

- b) Wir gehen schrittweise vor. Zunächst suchen wir eine Funktion, die das Intervall $[c, d]$ auf $[0, 1]$ bijektiv abbildet. Laut **a)** ist $g: [0, 1] \rightarrow [c, d]$, $g(x) := xd + (1-x)c$ bijektiv. Folglich leistet $g^{-1}: [c, d] \rightarrow [0, 1]$, $g^{-1}(y) := \frac{y-c}{d-c}$ das Gewünschte.

Im **a)**-Teil sahen wir, dass $f: [0, 1] \rightarrow [a, b]$, $f(x) := xb + (1-x)a = x(b-a) + a$ bijektiv ist. Da die Komposition bijektiver Funktionen wieder bijektiv ist, ist $f \circ g^{-1}$ eine Funktion, die das Intervall $[c, d]$ auf $[a, b]$ bijektiv abbildet. Für jedes $y \in [c, d]$ gilt

$$f \circ g^{-1}(y) = f(g^{-1}(y)) = f\left(\frac{y-c}{d-c}\right) = \frac{y-c}{d-c}(b-a) + a.$$

Aufgabe 4

- a) Wegen

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{für } x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & \text{für } x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1 & \text{für } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{für } x < -1 \end{cases}$$

und

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{für } x-4 \geq 0 \\ -(x-4) & \text{für } x-4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-4 & \text{für } x \geq 4 \\ -x+4 & \text{für } x < 4 \end{cases}$$

führen wir die Fallunterscheidung $x \in (-\infty, -1)$, $x \in [-1, 4)$, $x \in [4, \infty)$ durch, um die Beträge aufzulösen.

1. Fall: $x \in (-\infty, -1)$. Es gilt

$$|x-4| = |x+1| \Leftrightarrow -(x-4) = -(x+1) \Leftrightarrow -x+4 = -x-1 \Leftrightarrow 4 = -1.$$

Dies ist falsch. Daher ist die gegebene Gleichung für kein $x \in (-\infty, -1)$ erfüllt.

2. Fall: $x \in [-1, 4)$. Es gilt

$$\begin{aligned} |x-4| = |x+1| &\Leftrightarrow -(x-4) = x+1 \Leftrightarrow -x+4 = x+1 \\ &\Leftrightarrow -2x = -3 \Leftrightarrow x = 3/2. \end{aligned}$$

In diesem Fall ist die gegebene Gleichung genau für $x = 3/2 \in [-1, 4)$ erfüllt. [Hierbei ist zu beachten, dass man $3/2 \in [-1, 4)$ prüfen muss. Andernfalls würde man die Zahl $3/2$ in diesem Fall nicht betrachten und könnte nicht folgern, dass $3/2$ die gegebene Gleichung erfüllt.]

3. Fall: $x \in [4, \infty)$. Es gilt

$$|x-4| = |x+1| \Leftrightarrow x-4 = x+1 \Leftrightarrow -4 = 1.$$

Dies ist falsch. Daher ist die gegebene Gleichung für kein $x \in [4, \infty)$ erfüllt.

Fazit: $|x-4| = |x+1| \Leftrightarrow x = 3/2$.

Alternativ führen auch geometrische Überlegungen zum Ziel: Gesucht sind diejenigen $x \in \mathbb{R}$, die denselben Abstand zu 4 wie zu -1 haben, d.h. x liegt genau in der Mitte: $x = \frac{4+(-1)}{2} = \frac{3}{2}$.

- b) $|2x| > |5-2x|$ besagt, dass notwendig $x \neq 0$ sein muss. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt aber

$$\begin{aligned} |2x| > |5-2x| &\Leftrightarrow \left| \frac{5-2x}{2x} \right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \underbrace{\frac{5-2x}{2x}}_{=\frac{5}{2x}-1} < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{5}{2x} < 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{5}x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

- c) Es ist

$$\begin{aligned} |2-|2-x|| \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq 2-|2-x| \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq -|2-x| \leq -1 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq |2-x| \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq 2-x \leq 3 \text{ oder } 1 \leq -(2-x) \leq 3 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq 2-x \leq 3 \text{ oder } -3 \leq 2-x \leq -1 \Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 1 \text{ oder } -5 \leq -x \leq -3 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \text{ oder } 3 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow x \in [-1, 1] \cup [3, 5]. \end{aligned}$$

d) Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Fall: $x \in (-\infty, -1)$. Mit $|x + 1| = -(x + 1)$ und $|x - 1| = -(x - 1)$ ergibt sich

$$|x + 1| + |x - 1| = -2x.$$

Deshalb gilt

$$|x + 1| + |x - 1| > 2 \Leftrightarrow -2x > 2 \Leftrightarrow x < -1.$$

2. Fall: $x \in [-1, 1)$. Hier ist $|x + 1| = x + 1$ und $|x - 1| = -(x - 1)$, also

$$|x + 1| + |x - 1| = 2.$$

Demzufolge lautet in diesem Fall die Ungleichung: $2 > 2$. Diese ist unlösbar.

3. Fall: $x \in [1, \infty)$. Wegen $|x + 1| = x + 1$ und $|x - 1| = x - 1$ folgt

$$|x + 1| + |x - 1| = 2x$$

und damit

$$|x + 1| + |x - 1| > 2 \Leftrightarrow 2x > 2 \Leftrightarrow x > 1.$$

Zusammenfassend haben wir:

$$|x + 1| + |x - 1| > 2 \Leftrightarrow x < -1 \text{ oder } x > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

e) Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

1. Fall: $x < 0$. Dann ist $|x| = -x$, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{3x}{1 + |x|} < 4x^2 &\Leftrightarrow 3x < 4x^2(1 - x) \Leftrightarrow 0 < -4x^3 + 4x^2 - 3x \\ &\Leftrightarrow 0 < -4x\left(x^2 - x + \frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow 0 < -4x \underbrace{\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]}_{\geq \frac{1}{2} > 0} \\ &\Leftrightarrow 0 < -4x \Leftrightarrow x < 0. \end{aligned}$$

2. Fall: $x \geq 0$. Dann ist $|x| = x$, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{3x}{1 + |x|} < 4x^2 &\Leftrightarrow 3x < 4x^2(1 + x) \Leftrightarrow 0 < 4x^3 + 4x^2 - 3x \\ &\Leftrightarrow 0 < 4x\left(x^2 + x - \frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow 0 < 4x\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1\right] \\ &\stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} 4x > 0 \text{ und } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow x > 0 \text{ und } \left|x + \frac{1}{2}\right| > 1 \\ &\Leftrightarrow x > 0 \text{ und } \left(x + \frac{1}{2} > 1 \text{ oder } -\left(x + \frac{1}{2}\right) > 1\right) \\ &\Leftrightarrow x > 0 \text{ und } \left(x + \frac{1}{2} > 1 \text{ oder } x + \frac{1}{2} < -1\right) \\ &\Leftrightarrow x > 0 \text{ und } \left(x > \frac{1}{2} \text{ oder } x < -\frac{3}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Demzufolge gilt $\frac{3x}{1 + |x|} < 4x^2$ genau für $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 0$ oder $x > \frac{1}{2}$.

f) Auf keinen Fall kommt $x = 1$ in Frage, denn die Division durch 0 ist nicht definiert. Ansonsten multiplizieren wir die Ungleichung mit $1 - x$. Dabei müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. *Fall:* Sei zunächst $1 - x > 0$, also $x < 1$. Multiplikation mit $1 - x$ liefert

$$\begin{aligned} 2x + \frac{1}{1-x} \geq 1 &\Leftrightarrow 2x(1-x) + 1 \geq 1-x &\Leftrightarrow 2x - 2x^2 + 1 \geq 1-x \\ &\Leftrightarrow 3x - 2x^2 \geq 0 &\Leftrightarrow x(3-2x) \geq 0. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt genau dann, wenn $x \geq 0$ und $3 - 2x \geq 0$ oder aber wenn $x \leq 0$ und $3 - 2x \leq 0$ sind.

$x \geq 0$ und $3 - 2x \geq 0$ bedeutet $x \geq 0$ und $x \leq 3/2$, also $0 \leq x \leq 3/2$. Da wir im 1. Fall nur $x < 1$ betrachten, ergibt sich also $0 \leq x < 1$.

$x \leq 0$ und $3 - 2x \leq 0$ bedeutet $x \leq 0$ und $x \geq 3/2$, was nicht gleichzeitig möglich ist.

2. *Fall:* Jetzt sei $1 - x < 0$, also $x > 1$. Dann dreht sich bei Multiplikation mit $1 - x$ das \geq um, und wir erhalten

$$2x + \frac{1}{1-x} \geq 1 \Leftrightarrow 2x(1-x) + 1 \leq 1-x \Leftrightarrow x(3-2x) \leq 0.$$

Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn $x \geq 0$ und $3 - 2x \leq 0$ oder aber wenn $x \leq 0$ und $3 - 2x \geq 0$ sind.

$x \geq 0$ und $3 - 2x \leq 0$ bedeutet $x \geq 0$ und $x \geq 3/2$, also $x \geq 3/2$.

$x \leq 0$ und $3 - 2x \geq 0$ bedeutet $x \leq 0$ und $x \leq 3/2$, also $x \leq 0$. Da wir im 2. Fall nur $x > 1$ betrachten, ist dies hier nicht möglich.

Insgesamt: Die Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn $0 \leq x < 1$ oder $x \geq 3/2$.

Aufgabe 5

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten die beiden Fälle $x - y \geq 0$ und $x - y < 0$.

1. *Fall:* $x \geq y$. Dann ist $|x - y| = x - y$, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{x + y + |x - y|}{2} &= \frac{x + y + x - y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \max\{x, y\}, \\ \frac{x + y - |x - y|}{2} &= \frac{x + y - (x - y)}{2} = \frac{2y}{2} = y = \min\{x, y\}. \end{aligned}$$

2. *Fall:* $x < y$. Dann ist $|x - y| = -(x - y) = -x + y$, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{x + y + |x - y|}{2} &= \frac{x + y - x + y}{2} = \frac{2y}{2} = y = \max\{x, y\}, \\ \frac{x + y - |x - y|}{2} &= \frac{x + y + x - y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \min\{x, y\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6

a) Wir müssen zeigen, dass $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Sei dazu $x \in X$ beliebig.

Fall 1: $x \in A \cap B$. Dies bedeutet $x \in A$ und $x \in B$. Nach Definition der charakteristischen Funktion ist dann $\chi_{A \cap B}(x) = 1$ und $\chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 1 \cdot 1 = 1$; damit ist in diesem Falle die Gleichheit bewiesen.

Fall 2: $x \notin A \cap B$. Dann muss $x \notin A$ oder $x \notin B$ gelten. Somit ist $\chi_A(x) = 0$ oder $\chi_B(x) = 0$, d. h. das Produkt $\chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ ergibt auf jeden Fall 0. Dies stimmt überein mit $\chi_{A \cap B}(x) = 0$.

Bemerkung: Eine andere Darstellung ist $\chi_{A \cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$ für jedes $x \in X$.

b) Nach Definition der charakteristischen Funktion gilt für jedes $x \in X$

$$\chi_{C_X(A)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in C_X(A) \\ 0, & x \in C_X(C_X(A)) = A \end{cases} = \begin{cases} 1 - 0, & x \in C_X(A) \\ 1 - 1, & x \in A \end{cases} = 1 - \chi_A(x).$$

Unser erstes Ergebnis lautet also: $\chi_{C_X(A)} = 1 - \chi_A$.

Mit $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap C_X(B)$ und **a)** ergibt sich $\chi_{A \setminus B} = \chi_A \cdot \chi_{C_X(B)}$, also wegen des gerade Bewiesenen $\chi_{A \setminus B} = \chi_A \cdot (1 - \chi_B)$.

Nun zu $\chi_{A \cup B}$: Wir schreiben $A \cup B = C_X(C_X A \cap C_X B)$ und erhalten nach dem zuvor Bewiesenen

$$\begin{aligned} \chi_{A \cup B} &= \chi_{C_X(C_X A \cap C_X B)} = 1 - \chi_{C_X A \cap C_X B} = 1 - \chi_{C_X A} \cdot \chi_{C_X B} \\ &= 1 - (1 - \chi_A)(1 - \chi_B) = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B. \end{aligned}$$

Alternativ: Wir betrachten zunächst den Spezialfall, dass A und B disjunkt sind, und zeigen $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$. Sei dazu $x \in X$.

Fall 1: $x \in A \cup B$. Nach Definition ist dann $\chi_{A \cup B}(x) = 1$. Da x in A oder B , nicht jedoch in beiden Mengen liegt [Würde x sowohl in A als auch in B liegen, so wäre $A \cap B \neq \emptyset$ im Widerspruch zur Disjunktheit von A und B .], ergibt sich $\chi_A(x) + \chi_B(x) = 1$.

Fall 2: $x \notin A \cup B$, d.h. $x \notin A$ und $x \notin B$. Dann ist $\chi_{A \cup B}(x) = 0 = 0 + 0 = \chi_A(x) + \chi_B(x)$.

Nun zum allgemeinen Fall: Wir schreiben $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ und stellen fest, dass $A \setminus B, B \setminus A, A \cap B$ paarweise disjunkte Mengen sind. Daher erhalten wir nach dem eben Bewiesenen

$$\begin{aligned} \chi_{A \cup B} &= \chi_{[(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] \cup (A \cap B)} = \chi_{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)} + \chi_{A \cap B} = \chi_{A \setminus B} + \chi_{B \setminus A} + \chi_{A \cap B} \\ &= \chi_A \cdot (1 - \chi_B) + \chi_B \cdot (1 - \chi_A) + \chi_A \cdot \chi_B = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B. \end{aligned}$$

Bemerkung: Eine andere Darstellung ist $\chi_{A \cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$ für jedes $x \in X$.

Aufgabe 7

a) A sei eine beliebige Teilmenge von X . Sei $a \in A$. Dann ist $f(a) \in f(A)$. Gemäß Definition gilt für die Urbildmenge $f^{-1}(f(A)) = \{x \in X \mid f(x) \in f(A)\}$. Da $f(a)$ in $f(A)$ liegt, ergibt sich $a \in f^{-1}(f(A))$. Also ist $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Nun sei f zusätzlich injektiv. Um $A = f^{-1}(f(A))$ zu zeigen, müssen wir noch $f^{-1}(f(A)) \subset A$ begründen:

Sei dazu $x \in f^{-1}(f(A))$. Annahme: $x \in X \setminus A$.

Wegen $x \in f^{-1}(f(A)) = \{z \in X \mid f(z) \in f(A)\}$ gilt $f(x) \in f(A)$. Deshalb gibt es $x' \in A$ mit $f(x') = f(x)$. Außerdem haben wir $x \neq x'$, weil $x \notin A$ und $x' \in A$ sind. Folglich ist f nicht injektiv. Widerspruch! Also gilt $x \in A$. Hiermit ist $f^{-1}(f(A)) \subset A$ gezeigt.

b) Sei $B \subset Y$ und $y \in f(f^{-1}(B))$. Dann existiert ein $z \in f^{-1}(B)$ mit $y = f(z)$. Wegen $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ ist $f(z)$ in B und damit auch y in B enthalten.

Bemerkung: Ist f surjektiv, so gilt $f(f^{-1}(B)) = B$ für alle $B \subset Y$.

Beweis: Sei $B \subset Y$. Zu zeigen ist $B \subset f(f^{-1}(B))$.

Sei dazu $y \in B$. Da f surjektiv ist, existiert ein $x_0 \in X$ mit $f(x_0) = y$. Wegen $y \in B$ ist $f(x_0) \in B$ und damit $x_0 \in \{x \in X \mid f(x) \in B\} = f^{-1}(B)$. Also gilt $y = f(x_0) \in f(f^{-1}(B))$. Da $y \in B$ beliebig war, folgt $B \subset f(f^{-1}(B))$.

Aufgabe 8 (P)

- a) Kommutativgesetz: Zeige: $(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (y_1, y_2) * (x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.
Für alle $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ haben wir

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) * (y_1, y_2) &= (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1) = (y_1x_1 - y_2x_2, y_1x_2 + y_2x_1) \\ &= (y_1, y_2) * (x_1, x_2),\end{aligned}$$

also genügt $*$: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dem Kommutativgesetz.

Assoziativgesetz: Zu zeigen ist: $(x_1, x_2) * [(y_1, y_2) * (z_1, z_2)] = [(x_1, x_2) * (y_1, y_2)] * (z_1, z_2)$ für alle $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$.

Wir formen zunächst die linke Seite um: Für $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) * [(y_1, y_2) * (z_1, z_2)] &= (x_1, x_2) * [(y_1z_1 - y_2z_2, y_1z_2 + y_2z_1)] \\ &= (x_1(y_1z_1 - y_2z_2) - x_2(y_1z_2 + y_2z_1), x_1(y_1z_2 + y_2z_1) + x_2(y_1z_1 - y_2z_2)) \\ &= (x_1y_1z_1 - x_1y_2z_2 - x_2y_1z_2 - x_2y_2z_1, x_1y_1z_2 + x_1y_2z_1 + x_2y_1z_1 - x_2y_2z_2).\end{aligned}$$

Und nun zur rechten Seite

$$\begin{aligned}[(x_1, x_2) * (y_1, y_2)] * (z_1, z_2) &= [(x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)] * (z_1, z_2) \\ &= ((x_1y_1 - x_2y_2)z_1 - (x_1y_2 + x_2y_1)z_2, (x_1y_1 - x_2y_2)z_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)z_1) \\ &= (x_1y_1z_1 - x_2y_2z_1 - x_1y_2z_2 - x_2y_1z_2, x_1y_1z_2 - x_2y_2z_2 + x_1y_2z_1 + x_2y_1z_1).\end{aligned}$$

Ein Vergleich von rechter und linker Seite unter Berücksichtigung des Kommutativgesetzes von $+$ zeigt, dass beide Seiten gleich sind. Also genügt $*$: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dem Assoziativgesetz.

- b) Gesucht ist $(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$ so, dass $(x_1, x_2) * (e_1, e_2) = (x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt ist:

$$(x_1e_1 - x_2e_2, x_1e_2 + x_2e_1) = (x_1, x_2),$$

d.h. es soll für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$x_1e_1 - x_2e_2 = x_1$$

$$x_1e_2 + x_2e_1 = x_2$$

gelten. Koeffizientenvergleich liefert $e_1 = 1$ und $e_2 = 0$, also ist $(e_1, e_2) = (1, 0)$ das neutrale Element bzgl. $*$.

- c) Gesucht ist für jedes $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, für die das möglich ist, das zugehörige inverse Element $(x_1, x_2)^{-1}$ bzgl. der Verknüpfung $*$, d.h. es soll $(x_1, x_2) * (x_1, x_2)^{-1} = (1, 0) = (e_1, e_2)$ gelten. Wir schreiben $(y_1, y_2) := (x_1, x_2)^{-1}$.

$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (1, 0) \quad \Leftrightarrow \quad (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1) = (1, 0)$$

gilt genau dann, wenn

$$x_1y_1 - x_2y_2 = 1 \tag{1}$$

$$x_1y_2 + x_2y_1 = 0 \tag{2}$$

gelten. Um y_1, y_2 zu bestimmen, betrachten wir zunächst den Fall $x_1 \neq 0$ und $x_2 \neq 0$. Dann können wir die Gleichung (1) mit x_1 bzw. (2) mit x_2 multiplizieren und die resultierenden Gleichungen addieren:

$$x_1^2y_1 + x_2^2y_1 = x_1 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1^2 + x_2^2)y_1 = x_1 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Setzen wir dies in (2) ein, so erhalten wir

$$x_1 y_2 + x_2 \cdot \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_2 = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Sind $x_1 = 0$ und $x_2 \neq 0$, dann lauten (1) und (2)

$$\begin{aligned} -x_2 y_2 = 1 &\quad \Leftrightarrow \quad y_2 = -\frac{1}{x_2} = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \\ x_2 y_1 = 0 &\quad \Leftrightarrow \quad y_1 = 0 = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}. \end{aligned}$$

Sind $x_1 \neq 0$ und $x_2 = 0$, dann lauten (1) und (2)

$$\begin{aligned} x_1 y_1 = 1 &\quad \Leftrightarrow \quad y_1 = \frac{1}{x_1} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \\ x_1 y_2 = 0 &\quad \Leftrightarrow \quad y_2 = 0 = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}. \end{aligned}$$

Das Element $(x_1, x_2) = (0, 0)$ besitzt kein Inverses, weil (1) nie erfüllt werden kann.

Folglich ist für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ das jeweils zugehörige inverse Element bzgl. der Verknüpfung $*$ gegeben durch

$$(x_1, x_2)^{-1} = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right).$$

Bemerkungen: (1) Bei der Bestimmung des Einselements im **b**-Teil genügte es, nur $(x_1, x_2) * (e_1, e_2) = (x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ zu fordern, weil $*$: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ laut **a**) kommutativ ist. Darum ist mit $(x_1, x_2) * (e_1, e_2) = (x_1, x_2)$ auch $(e_1, e_2) * (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt. Aus dem gleichen Grunde mussten wir in **c**) nur $(x_1, x_2) * (x_1, x_2)^{-1} = (e_1, e_2)$ und nicht auch $(x_1, x_2)^{-1} * (x_1, x_2) = (e_1, e_2)$ fordern.

(2) In dieser Aufgabe haben wir gezeigt, dass $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, *)$ eine abelsche Gruppe ist (vgl. Multiplikation in \mathbb{C}).