UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2009/10
29.10.2009

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

2. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Gegeben seien die Mengen $M = \{2, 4, 7\}$ und $N = \{2, 4, 8, 9\}$. Geben Sie, falls möglich, eine injektive, eine nicht injektive, eine surjektive und eine nicht surjektive Abbildung von M nach N bzw. von N nach M an. Existieren auch bijektive Abbildungen?

b) Untersuchen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{x+4}{x-3}$ auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 2

a) Für $k \in \{1, 2, 3\}$ seien die Funktionen $f_k\colon \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ definiert durch

$$f_1(x) := x\,, \qquad f_2(x) := 1 + \frac{x}{1-x}\,, \qquad f_3(x) := 1 - \frac{1}{x}\,.$$

Überprüfen Sie jede dieser Funktionen auf Bijektivität und bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion.

b) Berechnen Sie $f_j \circ f_k$ für alle $j, k \in \{1, 2, 3\}$.

Aufgabe 3

a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ferner sei die Funktion $f\colon [0, 1] \to [a, b]$, $f(x) := xb + (1-x)a$ gegeben. Zeigen Sie, dass f bijektiv ist, und geben Sie die Umkehrfunktion von f an.

b) Nun seien $c, d \in \mathbb{R}$ mit $c < d$. Ermitteln Sie eine Funktion, die das Intervall $[c, d]$ auf $[a, b]$ bijektiv abbildet.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$ mit

a) $|x - 4| = |x + 1|\,;$ **b)** $|2x| > |5 - 2x|\,;$ **c)** $\big|2 - |2 - x|\big| \leqslant 1\,;$

d) $|x + 1| + |x - 1| > 2\,;$ **e)** $\dfrac{3x}{1 + |x|} < 4x^2\,;$ **f)** $2x + \dfrac{1}{1-x} \geqslant 1\,.$

Aufgabe 5

Zeigen Sie für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2} \qquad \text{und} \qquad \min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2}\,.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 6

Sei X eine beliebige Menge. Für $M \subset X$ definiere die *charakteristische Funktion von* M durch

$$\chi_M \colon X \to \{0,1\}, \quad \chi_M(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in M, \\ 0 & \text{für } x \notin M. \end{cases}$$

Es seien A und B Teilmengen von X.

a) Zeigen Sie, dass $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$ gilt.

b) Wie lassen sich die charakteristischen Funktionen der Mengen $C_X(A)$, $A \setminus B$ und $A \cup B$ durch χ_A und χ_B ausdrücken?

Aufgabe 7

Gegeben seien zwei Mengen X und Y sowie eine Funktion $f \colon X \to Y$. Zeigen Sie:

a) $A \subset f^{-1}(f(A))$ für alle $A \subset X$. Ist f injektiv, dann gilt sogar Gleichheit.

b) $f(f^{-1}(B)) \subset B$ für alle $B \subset Y$.

Aufgabe 8 (P)

Für Elemente (x_1, x_2) und (y_1, y_2) der Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ sei die Verknüpfung $* \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) := (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)\,.$$

a) Überprüfen Sie, dass $*$ dem Assoziativ- und dem Kommutativgesetz genügt.

b) Bestimmen Sie das *Einselement* $(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Verknüpfung $*$, d.h. das Element, für welches $(x_1, x_2) * (e_1, e_2) = (x_1, x_2)$ für jedes $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt ist.

c) Berechnen Sie für alle Elemente $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, für die dies möglich ist, das zugehörige *inverse Element* $(x_1, x_2)^{-1} \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Verknüpfung $*$, d.h. das Element, für welches $(x_1, x_2) * (x_1, x_2)^{-1} = (e_1, e_2)$ erfüllt ist.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **2, 3, 5 und 7**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.