UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2009/10

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Gegeben seien $x, y \in \mathbb{R}$ sowie $\varepsilon > 0$.

i) Die Aussage $0 \leqslant (\varepsilon x - y/\varepsilon)^2$ ist wahr und es gilt

$$0 \leqslant (\varepsilon x - y/\varepsilon)^2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant \varepsilon^2 x^2 - 2\varepsilon xy/\varepsilon + y^2/\varepsilon^2 \quad \Rightarrow \quad 2xy \leqslant \varepsilon^2 x^2 + y^2/\varepsilon^2.$$

ii) Unter Verwendung von i) erhalten wir

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \overset{\text{i)}}{\leqslant} x^2 + \varepsilon^2 x^2 + y^2/\varepsilon^2 + y^2 = (1+\varepsilon^2)x^2 + \Big(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\Big)y^2.$$

b) Nun seien $x, y \in (0, \infty)$.

i) Es gilt:

$$\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \overset{\mathbf{3\,c)}}{\Leftrightarrow} \quad x + y \leqslant x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant 2\sqrt{x}\sqrt{y}.$$

Die letzte Ungleichung ist offenkundig wahr.
Nun zur zweiten Ungleichung:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} \quad &\overset{|\cdot\sqrt{x}\sqrt{y}>0}{\Leftrightarrow} \quad x\sqrt{y} + \sqrt{x}\,y \leqslant x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x\sqrt{x} - x\sqrt{y} + y\sqrt{y} - y\sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant (x-y)\big(\sqrt{x} - \sqrt{y}\big).\end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist wahr, denn:
1. Fall: $x = y$. $0 \leqslant 0$ ist wahr.
2. Fall: $x < y$. Wegen $x < y \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x} < \sqrt{y}$ ist $0 \leqslant (x-y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ wahr.
3. Fall: $x > y$. Wegen $x > y \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x} > \sqrt{y}$ folgt auch hier $0 \leqslant (x-y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})$.

ii) Es gilt

$$\big|\sqrt{x} - \sqrt{y}\big| \leqslant \sqrt{|x-y|} \quad \overset{\mathbf{3\,c)}}{\Leftrightarrow} \quad \big(\sqrt{x} - \sqrt{y}\big)^2 \leqslant \big(\sqrt{|x-y|}\big)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leqslant |x-y|.$$

Im Fall $x \leqslant y$ ist dies äquivalent zu

$$x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leqslant y - x \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x}\big(\sqrt{x} - \sqrt{y}\big) \leqslant 0.$$

Letzteres ist wahr wegen $x \leqslant y \Rightarrow \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$.
Für $x \geqslant y$ (dies könnte man auch direkt aus obigem Fall folgern, weil der Ausdruck $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$ symmetrisch bzgl. Tausch $x \leftrightsquigarrow y$ ist) ergibt sich:

$$x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leqslant x - y \quad \Leftrightarrow \quad 2y - 2\sqrt{x}\sqrt{y} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{y}\big(\sqrt{y} - \sqrt{x}\big) \leqslant 0.$$

Letzteres ist wahr wegen $x \geqslant y \Rightarrow \sqrt{x} \geqslant \sqrt{y}$.

c) Wir bemerken zunächst, dass die Ungleichung $x \leqslant 4 + \sqrt{x-2}$ nur für $x \geqslant 2$ sinnvoll ist. Es gilt

$$x \leqslant 4 + \sqrt{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad x - 4 \leqslant \sqrt{x-2}.$$

Im Fall $x \geqslant 4$ ist dies nach Aufgabe **3 c)** äquivalent zu (man beachte $x - 4 \geqslant 0$)

$$\begin{aligned}(x-4)^2 \leqslant x-2 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 16 \leqslant x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 9x + 18 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)(x-6) \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \big(x - 3 \leqslant 0 \text{ und } x - 6 \geqslant 0\big) \text{ oder } \big(x - 3 \geqslant 0 \text{ und } x - 6 \leqslant 0\big) \\ &\Leftrightarrow \quad \big(x - 3 \geqslant 0 \text{ und } x - 6 \leqslant 0\big) \quad \Leftrightarrow \quad x \in [3, 6].\end{aligned}$$

Da wir nur $x \geqslant 4$ betrachtet haben, gilt $x \leqslant 4 + \sqrt{x-2}$ in diesem Fall genau für $x \in [4, 6]$.

Für jedes $x \in [2, 4)$ gilt $x - 4 < 0$ und, da die Wurzel nach Definition nichtnegativ ist, genügt jedes $x \in [2, 4)$ der Ungleichung $x - 4 < 0 \leqslant \sqrt{x-2}$ und somit auch $x \leqslant 4 + \sqrt{x-2}$.

Insgesamt haben wir

$$x \leqslant 4 + \sqrt{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in [2, 6].$$

Aufgabe 2

a)

$$\sum_{j=3}^{5} \frac{j+1}{j-2} = \frac{3+1}{3-2} + \frac{4+1}{4-2} + \frac{5+1}{5-2} = 4 + \frac{5}{2} + 2 = \frac{17}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{111} 5 = \underbrace{5 + 5 + \ldots + 5}_{\text{111-mal}} = 111 \cdot 5 = 555$$

$$\begin{aligned}\sum_{l=-2}^{4} (l+1)^2 &= (-2+1)^2 + (-1+1)^2 + (0+1)^2 + (1+1)^2 + (2+1)^2 + (3+1)^2 + (4+1)^2 \\ &= 1 + 0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 56\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{3} \sum_{n=m}^{3} n(n+m) &= \sum_{n=0}^{3} n(n+0) + \sum_{n=1}^{3} n(n+1) + \sum_{n=2}^{3} n(n+2) + \sum_{n=3}^{3} n(n+3) \\ &= (0 + 1 + 4 + 9) + (2 + 6 + 12) + (8 + 15) + 18 = 75\end{aligned}$$

b)

$$2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = \sum_{j=2}^{5} j^3$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \sum_{k=3}^{6} \frac{1}{k}$$

$$\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{100}{99 \cdot 101} = \sum_{n=2}^{100} \frac{n}{(n-1)(n+1)} = \sum_{j=1}^{99} \frac{j+1}{j(j+2)} = \sum_{j=3}^{101} \frac{j-1}{(j-2)j}$$

c) Alle Summen sind gleich, denn jede ergibt $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Dies lässt sich mit Hilfe von Indexverschiebungen (das sind bijektive Abbildungen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ nach $\{1, 2, \ldots, n\}$) einsehen:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \overset{l:=k-1}{=} \sum_{l=0}^{n-1} a_{l+1} \overset{j:=l+2}{=} \sum_{j=2}^{n+1} a_{j-1} = a_1 + \sum_{j=3}^{n+1} a_{j-1} \overset{k:=n+1-j}{=} a_1 + \sum_{k=0}^{n-2} a_{n-k}\,.$$

Aufgabe 3

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Dann gilt

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \sum_{k=0}^{n-1}(q^k - q^{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} q^k - \sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1} = q^0 + \sum_{k=1}^{n-1} q^k - (\sum_{k=0}^{n-2} q^{k+1} + q^n)$$

$$\overset{(*)}{=} 1 + \sum_{j=0}^{n-2} q^{j+1} - \sum_{k=0}^{n-2} q^{k+1} - q^n = 1 - q^n\,.$$

Division mit $1-q$ ergibt die behauptete Identität. In $(*)$ führten wir in der ersten Summe die Indexverschiebung $j := k-1$ durch. Eine endliche Summe von Differenzen, bei der je zwei Glieder (außer dem ersten und letzten) sich gegenseitig aufheben, heißt *Teleskopsumme*.

Bemerkung: Die behauptete Identität kann man auch durch vollständige Induktion beweisen.

IA: Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=0}^{1-1} q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q^1}{1-q}$ für alle $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$ für alle $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. (IV)

Für jedes $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ergibt sich damit

$$\sum_{k=0}^{(n+1)-1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n \overset{\text{IV}}{=} \frac{1-q^n}{1-q} + q^n \cdot \frac{1-q}{1-q} = \frac{1-q^n+q^n-q^n\cdot q}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $w, z \in \mathbb{R}$. Sind $w \neq z$ und $z \neq 0$, so setzen wir $q := \frac{w}{z}$. Dann ist $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und laut **a)** gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{w}{z}\Big)^k = \frac{1-(\frac{w}{z})^n}{1-\frac{w}{z}} \quad\Leftrightarrow\quad \Big(1-\frac{w}{z}\Big)\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{w}{z}\Big)^k = 1-\Big(\frac{w}{z}\Big)^n$$

$$\overset{|\cdot z^n (\neq 0)}{\Leftrightarrow}\quad z\Big(1-\frac{w}{z}\Big)\,z^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} z^{-k}w^k = z^n - w^n$$

$$\Leftrightarrow\quad (z-w)\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}w^k = z^n - w^n.$$

Im Fall $w = z$ lautet die behauptete Gleichung $0 = 0$, diese ist offensichtlich wahr.

Sei nun $z = 0$. Wegen

$$\sum_{k=0}^{n-1} 0^{n-1-k}w^k = \sum_{k=0}^{n-2} \underbrace{0^{n-1-k}}_{=0,\text{ da } n-1-k\geqslant 1} w^k + 0^{n-1-(n-1)}w^{n-1} = 0^0 w^{n-1} = 1\cdot w^{n-1} = w^{n-1}$$

gilt für jedes $w \in \mathbb{R}$

$$(0-w)\sum_{k=0}^{n-1} 0^{n-1-k}w^k = -w\cdot w^{n-1} = -w^n = 0 - w^n\,.$$

Also ist die behauptete Gleichung auch in diesem Fall erfüllt.

c) Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Seien also $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sowie $x, y \in [0, \infty)$. Für $x = 0$ ist die behauptete Aussage klar. Für $x > 0$ ergibt sich

$$x \leqslant y \quad\Leftrightarrow\quad x - y \leqslant 0 \quad\overset{(*)}{\Leftrightarrow}\quad (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k \leqslant 0 \quad\overset{\textbf{b)}}{\Leftrightarrow}\quad x^n - y^n \leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^n \leqslant y^n.$$

Zu $(*)$: Wegen $x > 0$ und $y \geqslant 0$ ist $\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k = x^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{x^{n-1-k}y^k}_{\geqslant 0} \geqslant x^{n-1} > 0$.

Aufgabe 4

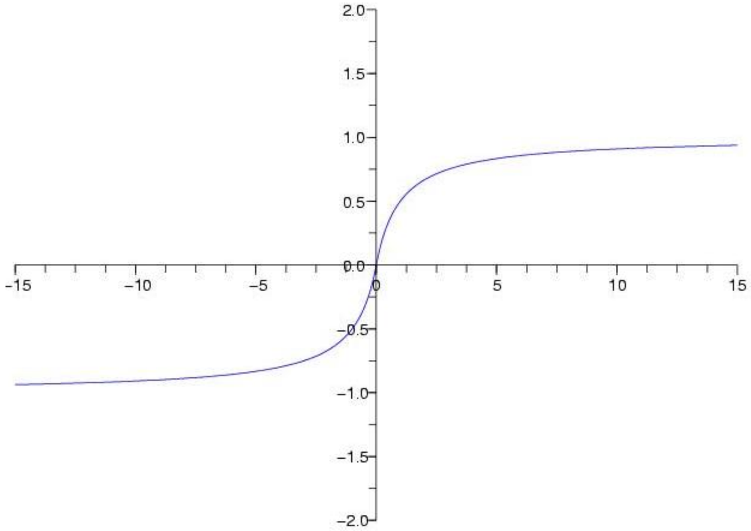
Zuerst erinnern wir uns an die Definition der Betragsfunktion

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to [0,\infty), \quad x \mapsto |x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geqslant 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Damit erhalten wir für die Funktion h

$$h(x) = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} = \quad 1 - \dfrac{1}{1+x} & \text{für } x \geqslant 0 \\ \dfrac{x}{1-x} = -1 + \dfrac{1}{1-x} & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Zur Vereinfachung der nachfolgenden Untersuchungen betrachten wir das Schaubild von h:



a) **Monotonie:** Beh.: h ist eine streng monoton wachsende Funktion.

Zum Nachweis müssen wir zeigen: Ist $x_1 < x_2$, dann folgt $h(x_1) < h(x_2)$.

1. Fall: $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ mit $x_1 < x_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 \quad &\Rightarrow \quad 1 - x_2 < 1 - x_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1-x_1} < \frac{1}{1-x_2} \\ &\Rightarrow \quad -1 + \frac{1}{1-x_1} < -1 + \frac{1}{1-x_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{1-x_1} < \frac{x_2}{1-x_2} \\ &\Rightarrow \quad h(x_1) < h(x_2)\,. \end{aligned}$$

2. Fall: $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ mit $x_1 < x_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 \quad &\Rightarrow \quad 1 + x_1 < 1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+x_2} < \frac{1}{1+x_1} \\ &\Rightarrow \quad -\frac{1}{1+x_1} < -\frac{1}{1+x_2} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{1+x_1} < 1 - \frac{1}{1+x_2} \\ &\Rightarrow \quad \frac{x_1}{1+x_1} < \frac{x_2}{1+x_2} \quad \Rightarrow \quad h(x_1) < h(x_2)\,. \end{aligned}$$

3. Fall: $x_1 \in (-\infty, 0)$ und $x_2 \in [0, \infty)$. Hier gilt stets $x_1 < x_2$. Da dann $h(x_1) < 0$ und $h(x_2) \geqslant 0$ ist, folgt sofort $h(x_1) < h(x_2)$.

Also ist die Funktion h streng monoton wachsend.

Beschränktheit: Beh.: Es gilt $|h(x)| < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich nämlich

$$|h(x)| = \frac{|x|}{|1 + |x||} = \frac{|x|}{1 + |x|} < 1,$$

denn

$$0 < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| < 1 + |x| \overset{1+|x|>0}{\Rightarrow} \frac{|x|}{1+|x|} < 1.$$

Injektivität: Beh.: h ist injektiv. Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \neq x_2$.

1. Fall: $x_1 < x_2$. Da h streng monoton wachsend ist, folgt $h(x_1) < h(x_2)$. Insbesondere gilt $h(x_1) \neq h(x_2)$.

2. Fall: $x_1 > x_2$. Da h streng monoton wachsend ist, folgt $h(x_1) > h(x_2)$. Insbesondere gilt $h(x_1) \neq h(x_2)$.

In beiden Fällen ergibt sich $h(x_1) \neq h(x_2)$. Also ist h injektiv.

Bildbereich: Beh.: $h(\mathbb{R}) = (-1, 1)$. Zunächst stellen wir fest, dass wegen $|h(x)| < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ die Inklusion $h(\mathbb{R}) \subset (-1, 1)$ gilt. Um $(-1, 1) \subset h(\mathbb{R})$ zu zeigen, müssen wir zu jedem $y \in (-1, 1)$ ein $x \in \mathbb{R}$ finden mit $y = h(x)$. Sei dazu $y \in (-1, 1)$ beliebig.

1. Fall: $y \in (-1, 0)$. Definiere $x := \frac{y}{1-|y|} = \frac{y}{1+y}$. Dann ist $x < 0$ und es gilt

$$f(x) = f(\frac{y}{1+y}) = -1 + \frac{1}{1 - \frac{y}{1+y}} = -1 + \frac{1+y}{1+y-y} = y\,.$$

2. Fall: $y \in [0, 1)$. Definiere $x := \frac{y}{1-|y|} = \frac{y}{1-y}$. Dann ist $x \geqslant 0$ und es gilt

$$f(x) = f(\frac{y}{1-y}) = 1 - \frac{1}{1 + \frac{y}{1-y}} = 1 - \frac{1-y}{1-y+y} = y\,.$$

Hiermit ist $h(\mathbb{R}) = (-1, 1)$ gezeigt.

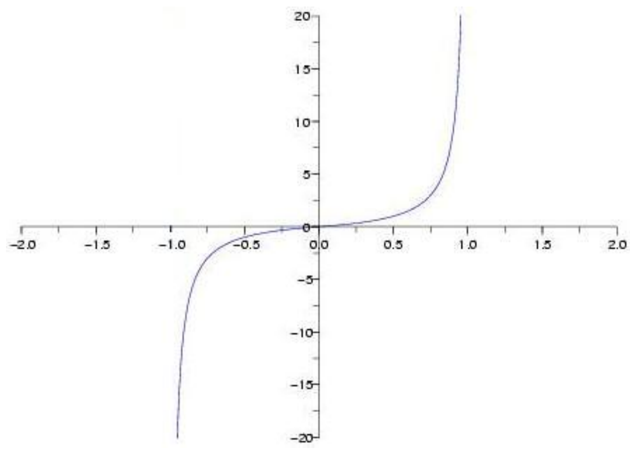
Also ist die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht surjektiv (z.B. $2 \notin h(\mathbb{R})$). Wir betrachten anstelle von h die durch

$$g\colon \mathbb{R} \to (-1, 1)\,, \quad g(x) := h(x)$$

definierte Funktion g. Dann ist g surjektiv und injektiv, d.h. bijektiv. Daher existiert die Umkehrfunktion von g. Der Berechung des Bildbereichs von h können wir entnehmen, dass diese durch

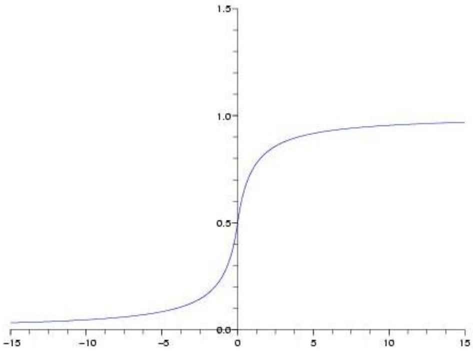
$$g^{-1}\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}\,, \quad g^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|}$$

gegeben ist.



b) Aus Teil **a)** wissen wir, dass die Funktion g, die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ auf $(-1, 1)$ bijektiv abbildet. Wir suchen nun eine Funktion f, die $(-1, 1)$ auf $(0, 1)$ bijektiv abbildet: Nach Aufgabe 3 a) vom 2. Übungsblatt (mit $a = -1, b = 1$) ist $[-1, 1] \to [0, 1], y \mapsto \frac{y-(-1)}{1-(-1)} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$ bijektiv, also leistet $f\colon (-1, 1) \to (0, 1)$, $f(y) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$ das Gewünschte. Eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $(0, 1)$ ist dann durch die Komposition $f \circ g\colon \mathbb{R} \to (0, 1)$ gegeben:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{x}{1 + |x|}) = \frac{1}{2}\frac{x}{1 + |x|} + \frac{1}{2} \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$



Aufgabe 5

a) Mit quadratischer Ergänzung erkennen wir für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 - x + 2 = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geqslant \frac{7}{4}.$$

Wegen $(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{4} \in \{x^2 - x + 2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ folgt

$$\min\{x^2 - x + 2 \mid x \in \mathbb{R}\} = \inf\{x^2 - x + 2 \mid x \in \mathbb{R}\} = \frac{7}{4}.$$

Da $\{x^2 - x + 2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ nach oben unbeschränkt ist (Beweis?), existieren Maximum und Supremum von $\{x^2 - x + 2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ nicht.

b) Wir erkennen sofort, dass $B := \{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt ist. In der Tat gilt $(-1)^n + \frac{1}{n} \leqslant 1 + 1 = 2$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zur Bestimmung des Supremums, also der kleinsten oberen Schranke, bemerken wir, dass der Ausdruck $(-1)^n + \frac{1}{n}$ für ungerade natürliche Zahlen $\leqslant 0$ ist. Da $(-1)^n = 1$ für gerade $n \in \mathbb{N}$ gilt und $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade}\} \to \mathbb{R}, n \mapsto \frac{1}{n}$ monoton fallend ist, folgern wir aus $(-1)^n + \frac{1}{n} \leqslant (-1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$: $\sup B = \max B = \frac{3}{2}$.

Nun zur unteren Schranke. Wir behaupten: $\inf B = -1$.

Wir müssen uns zunächst davon überzeugen, dass -1 überhaupt eine untere Schranke von B ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt in der Tat

$$(-1)^n + \frac{1}{n} \geqslant (-1)^n \geqslant -1.$$

Nun zeigen wir, dass -1 auch die größte untere Schranke ist. Dazu nehmen wir an, dass es eine größere untere Schranke K gibt, etwa $K = -1 + \varepsilon$ mit einem $\varepsilon > 0$, und führen dies zu einem Widerspruch. Es soll also gelten

$$K \leqslant (-1)^n + \frac{1}{n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da dies insbesondere für ungerade n gilt, folgt für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$

$$-1 + \varepsilon \leqslant -1 + \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon \leqslant \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad n \leqslant \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dies kann jedoch nicht sein, weil die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt ist. Also ist die Annahme falsch, und es gilt $-1 = \inf B$.

Da $-1 \notin B$ [Annahme: $-1 \in B$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(-1)^n + \frac{1}{n} = -1 \Leftrightarrow (-1)^n + 1 = -\frac{1}{n}$. Da auf der linken Seite eine ganze Zahl steht, muss auf der rechten Seite ebenfalls eine solche stehen, so dass $n = 1$ folgt. Jedoch ist die Gleichung $(-1)^n + \frac{1}{n} = -1$ für $n = 1$ nicht erfüllt. Widerspruch!] ist, existiert das Minimum von B nicht.

c) Die Menge $C := \{x + \frac{1}{x} \mid 0 < x \leqslant 42\}$ ist nicht nach oben beschränkt. Wäre nämlich Γ eine obere Schranke von C, so müsste für alle $x \in (0, 42]$

$$x + \frac{1}{x} \leqslant \Gamma$$

gelten. Insbesondere könnten wir dann $x = \frac{1}{n} \in (0, 42]$ einsetzen und erhielten $\frac{1}{n} + n \leqslant \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Erst recht hätten wir dann $n \leqslant \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch dazu, dass $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist. Somit existieren weder Supremum noch Maximum von C.

Die Menge C ist aber nach unten durch 2 beschränkt, denn für jedes $x > 0$ erhalten wir durch Multiplikation mit x

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 \geqslant 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 \geqslant 0$$

und letzteres ist offensichtlich wahr. Zudem gilt $2 \in A$ (man setze $x = 1$). Damit wissen wir: Keine Zahl > 2 kann untere Schranke von C sein. Also ist $\inf C = 2$ und wegen $2 \in C$ folgt auch $\min C = 2$.

d) Wir setzen $D := \{\frac{x^2}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R}\}$. Offenbar gilt $x^2(1 + x^2)^{-1} \geqslant 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem ist $0 \in D$ (man setze $x = 0$). Damit folgt: Infimum und Minimum von D existieren, und es ist $\inf D = \min D = 0$.

Die Menge D ist nach oben durch 1 beschränkt, denn wegen $1 + x^2 > 0$ gilt

$$\frac{x^2}{1+x^2} \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leqslant 1 + x^2.$$

Die letzte Ungleichung ist natürlich für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Wir zeigen nun, dass 1 sogar die *kleinste* obere Schranke ist. Sei $\Gamma < 1$ beliebig; wir wollen zeigen, dass Γ keine obere Schranke von D ist. Wir müssen also ein $x \in \mathbb{R}$ finden mit

$$\frac{x^2}{1+x^2} > \Gamma.$$

Dies ist äquivalent zu

$$x^2 > \Gamma(1 + x^2), \quad \text{also} \quad (1 - \Gamma)x^2 > \Gamma, \quad \text{d.h.} \quad x^2 > \frac{\Gamma}{1 - \Gamma}$$

und die letzte Ungleichung ist für ein hinreichend großes x (etwa für $x = \sqrt{\frac{\Gamma}{1-\Gamma} + 1}$) offenbar erfüllt. Also ist $\sup D = 1$. Wegen $1 \notin D$ (Beweis?) existiert das Maximum von D nicht.

e) Definiere $E := f([0, 1]) = \{f(x) \mid x \in [0, 1]\}$.

Aufgrund von $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [0, 1]$ und $f(1/3) = 0$ gilt $\inf E = \min E = 0$.

$\sup E$ und $\max E$ existieren nicht, weil E nicht nach oben beschränkt ist. Annahme: E ist nach oben beschränkt. Dann gibt es eine obere Schranke $\Gamma \in (1, \infty)$ mit $y \leqslant \Gamma$ für alle $y \in E$, d.h. für alle $x \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ gilt $\frac{1}{x} \leqslant \Gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\Gamma} \leqslant x$ $(*)$.
Laut Vorlesung liegt zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen immer eine irrationale Zahl, d.h. für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es ein $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $a < \xi < b$. Insbesondere gibt es eine irrationale Zahl $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $0 < \xi < 1/\Gamma$. Wegen $1/\Gamma < 1$ haben wir ein $\xi \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ gefunden mit $\xi < \frac{1}{\Gamma}$. Dies steht im Widerspruch zu $(*)$. Somit ist die getroffene Annahme falsch und E tatsächlich nicht nach oben beschränkt.

Aufgabe 6

Vorbemerkung: Sei $M \subset \mathbb{R}$ nichtleer. Setze $-M := \{-x \mid x \in M\}$. Dann gilt für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha \text{ ist untere Schranke von } M \quad &\Leftrightarrow \quad x \geqslant \alpha \;\text{ für alle } x \in M \quad \Leftrightarrow \quad -x \leqslant -\alpha \;\text{ für alle } x \in M \\ &\Leftrightarrow \quad -\alpha \text{ ist obere Schranke von } -M. \end{aligned}$$

Sei nun M nach unten beschränkt und $\alpha \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke von M. Laut Vorbemerkung ist dann $-\alpha$ eine obere Schranke von $-M$. Außerdem ist $-M$ nichtleer, weil M nichtleer ist. Damit existiert nach dem Vollständigkeitsaxiom das Supremum $\sup(-M) =: \Gamma$. Gemäß Vorbemerkung ist $-\Gamma$ eine untere Schranke von M. Um $-\Gamma = \inf M$ zu zeigen, müssen wir noch begründen, dass $-\Gamma$ die größte untere Schranke von M ist, d.h. dass für jede untere Schranke s von M gilt: $-\Gamma \geqslant s$. Sei dazu s eine untere Schranke von M. Dann ist $-s$ eine eine obere Schranke von $-M$. Wegen $\Gamma = \sup(-M)$ gilt $\Gamma \leqslant -s$. Hieraus folgt $-\Gamma \geqslant s$. Also ist $-\Gamma$ die größte untere Schranke von M und $-\Gamma = \inf M$ ist bewiesen.

Aufgabe 7

Da $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$ beschränkt sind, also insbesondere nach oben beschränkt sind, existieren $\alpha := \sup A$ und $\beta := \sup B$. Wir sollen nun zeigen, dass $A + B$ nach oben beschränkt ist und $\sup(A + B) = \alpha + \beta$ gilt. Dazu müssen wir zwei Dinge beweisen: Zum einen, dass $\alpha + \beta$ eine obere Schranke von $A + B$ ist; zum anderen, dass dies auch die *kleinste* obere Schranke ist.
Wählen wir ein beliebiges $x \in A + B$, so gibt es $a \in A$ und $b \in B$ mit $x = a + b$. Da α bzw. β obere Schranken für A bzw. B sind, gilt $a \leqslant \alpha$ und $b \leqslant \beta$. Addieren dieser beiden Gleichungen liefert

$$x = a + b \leqslant \alpha + \beta.$$

Damit wissen wir, dass $\sup(A + B) \leqslant \alpha + \beta$ ist, d. h. $A + B$ ist nach oben beschränkt und $\alpha + \beta$ ist eine obere Schranke.
Aber ist dies auch die *kleinste* obere Schranke? Dies können wir garantieren, wenn wir zeigen: Keine Zahl $< \alpha + \beta$ ist obere Schranke, d. h. zu jeder Zahl $\Gamma < \alpha + \beta$ existiert ein $x \in A + B$ mit $x > \Gamma$. Sei also $\Gamma < \alpha + \beta$ beliebig. Dann ist $\Gamma - \alpha < \beta$ und, da β die *kleinste* obere Schranke von B ist, muss ein $b \in B$ existieren mit $b > \Gamma - \alpha$. Es gilt also $\alpha > \Gamma - b$. Daher existiert wiederum ein $a \in A$ mit $a > \Gamma - b$, d. h. es ist $a + b > \Gamma$, und wegen $a + b \in A + B$ kann damit Γ keine obere Schranke von $A + B$ sein.
Nun zum Infimum: Da A und B nach unten beschränkt sind, folgt genau wie oben, dass auch $A + B$ nach unten beschränkt ist. Da $\inf(M) = -\sup(-M)$ für beschränkte nichtleere $M \subset \mathbb{R}$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} \inf(A + B) &= -\sup\big(-(A + B)\big) = -\sup\big((-A) + (-B)\big) = -\big(\sup(-A) + \sup(-B)\big) \\ &= -\big(-\inf A + (-\inf B)\big) = \inf A + \inf B. \end{aligned}$$

Aufgabe 8

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

i) Wegen $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ ist $f(0) = 0$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ folgt aus $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$

$$f(-x) = -f(x). \tag{1}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt nach $(n-1)$-maliger Verwendung der Voraussetzung

$$f(nx) = f(\underbrace{x + \ldots + x}_{n\text{-mal}}) = f(\underbrace{x + \ldots + x}_{(n-1)\text{-mal}}) + f(x) = \ldots = \underbrace{f(x) + \ldots + f(x)}_{n\text{-mal}} = nf(x). \tag{2}$$

Hieraus folgt mit (1)

$$f(px) = pf(x) \qquad \text{für alle } p \in \mathbb{Z} \text{ und } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

[Für $p \in \mathbb{N}$ siehe (2). Im Fall $p = 0$ ergibt sich $f(0 \cdot x) = f(0) = 0 = 0 \cdot f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Im Fall $p \in \mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\})$ ist $-p \in \mathbb{N}$. Deshalb liefert (2) für jedes $x \in \mathbb{R}$: $f(-px) = -pf(x)$. Da $f(-px) = -f(px)$ laut (1) gilt, folgt $f(px) = pf(x)$.]

ii) Für beliebige $q \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ schließen wir

$$f(x) = f(q\,\tfrac{1}{q}x) \overset{(2)}{=} q\,f(\tfrac{1}{q}x) \quad \Leftrightarrow \quad f(\tfrac{1}{q}x) = \tfrac{1}{q}\,f(x). \tag{4}$$

Sei nun $r \in \mathbb{Q}$. Dann existieren $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $r = \frac{p}{q}$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$f(rx) = f(\tfrac{p}{q}x) \overset{(3)}{=} pf(\tfrac{1}{q}x) \overset{(4)}{=} \tfrac{p}{q}f(x) = rf(x). \tag{5}$$

Nun sei f zusätzlich streng monoton wachsend. Setze $a := f(1)$. Da $f(0) = 0$ und f streng monoton wachsend ist, ergibt sich $a > 0$. Gemäß (5) mit $x = 1$ haben wir

$$f(r) = ar \qquad \text{für alle } r \in \mathbb{Q}. \tag{6}$$

Um $f(x) = ax$ für alle $x \in \mathbb{R}$ zu zeigen, führen wir einen Widerspruchsbeweis.
Annahme: Es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \neq ax$.
1. Fall: $f(x) < ax$. Wegen $a > 0$ ist dies äquivalent zu $\frac{f(x)}{a} < x$. Wähle $r \in \mathbb{Q}$ mit $\frac{f(x)}{a} < r < x$. Aufgrund der Monotonie von f ergibt sich

$$ar \overset{(6)}{=} f(r) < f(x) < ar\,.$$

Widerspruch!
2. Fall: $f(x) > ax$. Wegen $a > 0$ ist dies äquivalent zu $\frac{f(x)}{a} > x$. Wähle $r \in \mathbb{Q}$ mit $\frac{f(x)}{a} > r > x$. Aufgrund der Monotonie von f ergibt sich

$$ar \overset{(6)}{=} f(r) > f(x) > ar\,.$$

Widerspruch!
Folglich ist die Annahme falsch und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = ax$.

Aufgabe 9 (P)

Seien $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Ist $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 = 0$, so ist die Ungleichung klar. Sei also $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 > 0$. Dann folgt mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)a_k + \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)b_k \\
&\leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2}\left(\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}\right).
\end{aligned}$$

Dividieren durch $\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2}$ (> 0) liefert die behauptete Ungleichung.

Aufgabe 10 (P)

Sei $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(m,n) := 2^{m-1}(2n-1)$.

Beh.: f ist injektiv. Hierzu müssen wir einsehen: Für alle $(m,n),(m',n')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ gilt

$$f(m,n)=f(m',n') \quad\Rightarrow\quad (m,n)=(m',n')\,.$$

Seien dazu $(m,n),(m',n')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ mit $f(m,n)=f(m',n')$, d.h.

$$2^{m-1}(2n-1)=2^{m'-1}(2n'-1)\,. \tag{7}$$

Nun ist $(m,n)=(m',n')$, also $m=m'$ und $n=n'$, zu zeigen. Es gilt

$$2^{m-m'}(2n-1)=2^{-m'+1}\,2^{m-1}(2n-1)\overset{(7)}{=}2^{-m'+1}2^{m'-1}(2n'-1)=2n'-1\,.$$

Da $2n'-1$ ungerade ist, muss auch $2^{m-m'}(2n-1)$ ungerade sein. Dies ist nur für $2^{m-m'}=1$ bzw. $m=m'$ möglich. Setzen wir das in (7) ein, so folgt

$$2^{m-1}(2n-1)=2^{m-1}(2n'-1) \quad\Longleftrightarrow\quad 2n-1=2n'-1 \quad\Longleftrightarrow\quad n=n'\,.$$

Insgesamt haben wir $(m,n)=(m',n')$. Hiermit ist die Injektivität von f gezeigt.

Beh.: f ist surjektiv, d.h. $f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})=\mathbb{N}$. Wir müssen begründen, dass es zu jedem $x\in\mathbb{N}$ ein $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ gibt mit $x=f(m,n)$.
Sei $x\in\mathbb{N}$. Wir zeigen zunächst, dass $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ und $u\in\mathbb{N}$ ungerade existieren mit $x=2^k u$. Dazu betrachten wir $Z:=\{y\in\mathbb{N}\cup\{0\}\mid 2^y \text{ teilt } x\}$. Wegen $0\in Z$ ist $Z\neq\emptyset$. Außerdem gilt $Z\subset\{0,1,\ldots,x\}$, weil $2^y>x$ für alle $y\in\mathbb{N}$ mit $y>x$ ist. Somit ist Z eine endliche, nichtleere Menge. Daher existiert $\max Z =: k$. Insbesondere teilt 2^k die Zahl x, d.h. es gibt ein $u\in\mathbb{N}$ mit $x=2^k u$. Wäre u gerade, so existiert $v\in\mathbb{N}$ mit $u=2v$. Dann ist $x=2^k u=2^{k+1}v$. Folglich teilt 2^{k+1} die Zahl x, so dass auch $k+1$ in Z liegt, was aber der Maximalität von k widerspricht. Also ist u ungerade. Wir haben

$$x=2^k u=2^{k+1-1}(2\frac{u+1}{2}-1)\,.$$

Setze $m:=k+1\in\mathbb{N}$ und $n:=\frac{u+1}{2}\in\mathbb{N}$ (da u ungerade), dann gilt $x=2^{m-1}(2n-1)=f(m,n)$. Hiermit ist die Surjektivität von f bewiesen.

Bemerkung: Eine Menge A wird als *abzählbar unendlich* bezeichnet, wenn sie die gleiche Mächtigkeit hat wie die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Dies bedeutet, dass eine Bijektion zwischen A und $\mathbb{N}$ existiert, die Menge A also „durchnummeriert“ werden kann. Wie oben gesehen, gibt es eine bijektive Abbildung $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, daher ist $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ abzählbar unendlich.