UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2009/10
05.11.2009

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ sowie $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie:

i) $2xy \leqslant \varepsilon^2 x^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} y^2$; **ii)** $(x+y)^2 \leqslant (1+\varepsilon^2)x^2 + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\right)y^2$.

b) Nun seien $x, y \in (0, \infty)$. Beweisen Sie:

i) $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}}$; **ii)** $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x-y|}$.

c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die $x \leqslant 4 + \sqrt{x-2}$ erfüllen.

Definition (Summenzeichen): Seien $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$. Setze $\sum_{j=1}^{1} a_j := a_1$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{j=1}^{n+1} a_j := (\sum_{j=1}^{n} a_j) + a_{n+1}$. Dann ist $\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die leere Summe ist $\sum_{j=1}^{0} a_j := 0$.

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie: $\displaystyle\sum_{j=3}^{5} \frac{j+1}{j-2}, \quad \sum_{k=1}^{111} 5, \quad \sum_{l=-2}^{4} (l+1)^2, \quad \sum_{m=0}^{3}\sum_{n=m}^{3} n(n+m)$.

b) Schreiben Sie mit Hilfe des Summenzeichens:

$$2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3, \qquad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}, \qquad \frac{2}{1\cdot 3} + \frac{3}{2\cdot 4} + \frac{4}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{100}{99\cdot 101}.$$

c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reelle Zahlen. Welche der folgenden Summen sind gleich?

$$\sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad \sum_{l=0}^{n-1} a_{l+1}, \qquad \sum_{j=2}^{n+1} a_{j-1}, \qquad a_1 + \sum_{k=0}^{n-2} a_{n-k}.$$

Aufgabe 3

a) Beweisen Sie die geometrische Summenformel: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

b) Folgern Sie hieraus, dass für alle $w, z \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$z^n - w^n = (z-w)\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} w^k.$$

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in [0, \infty)$ gilt:

$$x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad x^n \leqslant y^n.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 4

Die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$h(x) := \frac{x}{1+|x|}\,.$$

a) Untersuchen Sie h auf Monotonie und Beschränktheit. Ist h injektiv? Berechnen Sie den Bildbereich von h.

b) Geben Sie eine Abbildung an, die $\mathbb{R}$ auf $(0,1)$ bijektiv abbildet.

Aufgabe 5

Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen Supremum, Infimum, Maximum bzw. Minimum besitzen. Bestimmen Sie gegebenenfalls diese Werte.

a) $\left\{x^2 - x + 2 \mid x \in \mathbb{R}\right\}$

b) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

c) $\left\{x + \dfrac{1}{x} \mid 0 < x \leqslant 42\right\}$

d) $\left\{\dfrac{x^2}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$

e) $f([0,1])$, wobei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Infimum besitzt.

Aufgabe 7

Seien A und B beschränkte, nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch $A + B := \{a + b \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$ eine beschränkte Menge ist und dass $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ gilt. Formulieren und beweisen Sie eine entsprechende Aussage für das Infimum.

Aufgabe 8

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

i) $f(px) = pf(x)$ für jedes $p \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$.

ii) $f(rx) = rf(x)$ für jedes $r \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Setze $a := f(1)$. Zeigen Sie: Ist f streng monoton wachsend, so gilt

$$f(x) = ax \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 9 (P)

Seien $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \qquad \textit{(Minkowskische Ungleichung).}$$

Aufgabe 10 (P)

Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(m,n) := 2^{m-1}(2n-1)$ bijektiv ist.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **4, 6, 7 und 8**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.