UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2009/10
12.11.2009

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

4. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\,;$

b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} j\cdot(n-k)\,;$

c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1} \quad (n \geqslant 2)\,;$

d) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \quad (n \geqslant 2)\,.$

Hinweis: Verwenden Sie in **c)**: $\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$ für jedes $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. In **d)** hilft $1-\frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2}$ weiter.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)!-1\,;$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\,;$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k} > \frac{n}{2}\,;$

d) 6^n-5n+4 ist durch 5 teilbar ;

e) $n \geqslant 5 \;\Rightarrow\; 2^n > n^2\,;$

f) $\displaystyle n \geqslant 2 \;\Rightarrow\; \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}\,.$

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die aus der Vorlesung bekannte Identität $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$, indem Sie einerseits den Wert der Teleskopsumme $\sum_{k=1}^{n}(k^2-(k-1)^2)$ berechnen und andererseits $\sum_{k=1}^{n}(k^2-(k-1)^2)$ nach $\sum_{k=1}^{n} k$ auflösen.

Ermitteln Sie durch Betrachten einer geeigneten Teleskopsumme eine Formel für $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Aufgabe 4

Die Zahlen $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, seien rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1\,, \qquad a_2 := \frac{1}{4}\,, \qquad a_n := \frac{(n-1)^2(n-2)^2}{n^2}\cdot a_{n-1}\cdot a_{n-2} \quad \text{für } n \geqslant 3.$$

Finden Sie eine nicht-rekursive Formel für a_n und beweisen Sie diese.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

a) Zeigen Sie den *binomischen Lehrsatz:* Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} .$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes:

i) $\displaystyle\sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} (-1)^j 3^{j+1}$; **ii)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$; **iii)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k}$.

Aufgabe 6

Gegeben seien die zwei komplexen Zahlen $z = 3 - i$ und $w = -1 + 2i$. Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag von

a) z^3; **b)** $1/z$; **c)** $z \cdot w$; **d)** $\overline{z}^2 + 1/w^2$.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, die Lösungen der Gleichung sind:

a) $z^2 - 2z + 3 = 0$; **b)** $z^2 = |z|^2$; **c)** $z^3 - (3-i)z^2 - iz + 1 + 3i = 0$.

Hinweis: In **c)** gibt es Lösungen der Gleichung auf der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe 8

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+1+i| = |z-3-3i|\}$; **b)** $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| \geqslant 1 \text{ und } |z-1-2i| < 3\}$;

c) $\{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < 3 \text{ und } \frac{2}{3}\pi < \arg(z) < \frac{4}{3}\pi\}$; **d)** $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^2) \leqslant 1\}$.

Aufgabe 9 (P)

a) Zeigen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes, dass für jede reelle Zahl $x \geqslant 0$ und jede natürliche Zahl $n \geqslant 2$ gilt:

$$(1+x)^n \geqslant \frac{n^2}{4} x^2 .$$

b) Folgern Sie aus **a)**, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sqrt[n]{n} \leqslant 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} .$$

c) Zeigen Sie:

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \quad \underset{n_0 \in \mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n \geqslant n_0}{\forall} \quad |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon .$$

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **3, 4, 5 und 7**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.