UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2009/10
19.11.2009

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

5. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil von

i) $\sum_{k=1}^{22} (1-i)^k\,;$ **ii)** $(1+i)^{2n} + (1-i)^{2n} \quad (n \in \mathbb{N}).$

b) Bestimmen Sie zu folgenden Gleichungen alle Lösungen in $\mathbb{C}$:

i) $z^3 + 8 = 0\,;$ **ii)** $z^6 + 1 = 0\,;$ **iii)** $z^5 = 1 - i\,.$

Aufgabe 2

a) Finden Sie Beispiele für reelle Folgen mit den folgenden Eigenschaften:

i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat genau die Zahlen 1 und 13 als Häufungspunkte.

ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat 0 als einzigen Häufungspunkt, jedoch konvergiert $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht.

iii) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keinen Häufungspunkt und ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

iv) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 2009, aber nicht monoton.

b) Bestimmen Sie jeweils alle Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

i) $a_n = \big(1 + (-1)^n\big)^n$ **ii)** $a_n = \begin{cases} 1 + 1/2^n\,, & n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2\,, & n = 3k-1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2 + (n+1)/n\,, & n = 3k-2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases}$

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie anhand der Definition, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\frac{2n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Zahl a konvergiert, und geben Sie zu $\varepsilon = 10^{-10}$ ein $N \in \mathbb{N}$ an mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$.

b) Entscheiden Sie jeweils durch Beweis oder Gegenbeispiel, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so gibt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant N$ gilt:

i) $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon\,;$ **ii)** $|a_n| < 2\varepsilon^2\,;$ **iii)** $|a_n + a_{n+1}| < \varepsilon\,.$

Aufgabe 4

Untersuchen Sie jeweils $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

a) $a_n = \dfrac{n^2 + 3n - 4}{1 + n^2 + 4n^3}\,;$ **b)** $a_n = (-1)^n + 1/n\,;$ **c)** $a_n = \sum_{k=1}^{n^2} \dfrac{k}{n^4}\,;$

d) $a_n = \dfrac{(2\sqrt{n} + 3)^2}{(3\sqrt[3]{n} + 2)^3}\,;$ **e)** $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\,;$ **f)** $a_n = \dfrac{(1+n)^{42} - n^{42}}{n^{41}}\,.$

Aufgabe 5

a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Beweisen Sie, dass dann jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und zwar gegen den selben Grenzwert.

b) Zeigen Sie: Besitzt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine divergente Teilfolge, so divergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 6

a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitze die konvergenten Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$. Folgt hieraus die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Zeigen Sie, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen $a \in \mathbb{C}$ konvergiert, wenn die beiden Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren und $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = a$ gilt.

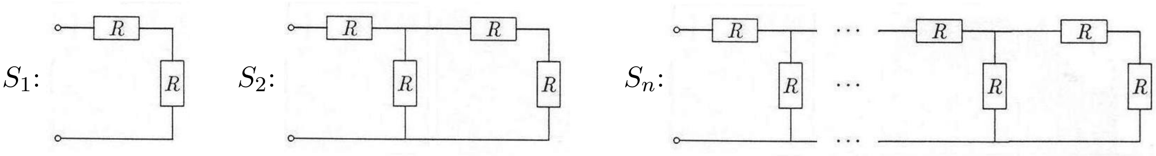
Aufgabe 7

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \dfrac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^5}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)}$; **b)** $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} + \left(\frac{3+4i}{15}\right)^n & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$

Aufgabe 8

R sei ein fester Ohmscher Widerstand. Durch Aneinanderhängen von $n \in \mathbb{N}$ Bauelementen entsteht die folgende Schaltung S_n:



a) Leiten Sie eine Rekursionsvorschrift für den Gesamtwiderstand W_n von S_n her.

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setze $a_n := W_n/R$. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \leqslant a_n \leqslant 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton ist.

c) Begründen Sie, dass der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert, und berechnen Sie diesen.

Aufgabe 9

Definiere für jedes $n \in \mathbb{N}$: $a_n := (1+\frac{1}{n})^n$ und $b_n := (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.
Hinweis: Versuchen Sie, mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung zu argumentieren.

Aufgabe 10 (P)

a) Gegeben seien $0 \leqslant q < 1$ und eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ mit $|a_{n+1}-a_n| \leqslant q^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Zeigen Sie, dass dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ eine Cauchy-Folge ist.
Hinweis: Stellen Sie $a_{n+k} - a_n$ für $k, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ als Teleskopsumme dar.

b) Durch $a_0 := 0,\ a_1 := 1,\ a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$ wird eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ definiert. Folgern Sie aus **a)**, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ konvergent ist, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **3, 6, 7, 8 und 9**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.