Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2009/10
26.11.2009

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

6. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie jeweils $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$:

a) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$;

b) $a_n = \dfrac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}$ $\quad (a > 0 \text{ fest})$;

c) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$;

d) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$;

e) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{nk}\right)^n$ $\quad (k \in \mathbb{N} \text{ fest})$;

f) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n+k}\right)^n$ $\quad (k \in \mathbb{N} \text{ fest})$.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $a_n = \sqrt[3n]{n+5}$;

b) $a_n = \sqrt[n]{n^p}$ $\quad (p \in \mathbb{N} \text{ fest})$;

c) $a_n = n^3\left(\sqrt[3]{n^6 + 6n} - \sqrt[3]{n^6 + 6}\right)$;

d) $a_n = n^4\left(\sqrt[10]{1 + 3n^{-4} + n^{-9}} - 1\right)$.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden: Sei $p \in \mathbb{N}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $b_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt $b_n \to b$, so ist auch $\sqrt[p]{b_n} \to \sqrt[p]{b}$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 3

a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Nun seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 4

Es sei $0 < a < 1$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird rekursiv definiert durch

$$a_1 := \tfrac{1}{2}a, \qquad a_{n+1} := \tfrac{1}{2}(a + a_n^2) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Konvergiert die Folge? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Aufgabe 5

Beweisen Sie: Zu jeder reellen Zahl x existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

— bitte wenden —

Aufgabe 6

Seien $0 < a < b$. Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien definiert durch

$$a_1 := a, \quad b_1 := b, \qquad a_{n+1} := \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}\,, \quad b_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n+b_n) \quad \text{für } n\in\mathbb{N}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass die Folge der Intervalle $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung bildet.

b) Welche Zahl wird dadurch bestimmt?

Hinweis: Betrachten Sie $a_{n+1}b_{n+1}$.

Aufgabe 7

Untersuchen Sie $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)^{3k-1}}{3^{2k+1}}$; **b)** $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$; **c)** $s_n = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+k}$.

Aufgabe 8

Für jedes $n\in\mathbb{N}$ definiere $\sigma_n := \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$. Zeigen Sie, dass für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt:

$$e - \frac{1}{n\cdot n!} < \sigma_n < e - \frac{1}{(n+1)!}\,.$$

Aufgabe 9 (P)

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \to a$ für $n\to\infty$. Zeigen Sie:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \to a \quad (n\to\infty)\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $a=0$ und wählen Sie zu $\varepsilon>0$ eine geeignete Zerlegung $\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n) = \frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_m) + \frac{1}{n}(a_{m+1}+\cdots+a_n)$.

Die Vorlesungshomepage ist ab sofort unter der URL

www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm1etechphys2009w/

zu erreichen.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **2, 6, 7 und 8**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.