Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2009/10
3.12.2009

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

7. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+n^2}-n\right)$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ **e)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+(-1)^n}$ **f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\frac{1}{n}}$

Aufgabe 2

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $a_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ und $b_n := \dfrac{\left(1+\frac{1}{2}(-1)^n\right)^n}{n^2}$.

a) Beweisen Sie: Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ divergent ist.

c) Warum ist das Leibnizkriterium hier nicht anwendbar?

d) Was kann man mit dem Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sagen? Und was liefert das Wurzelkriterium?

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die komplexe Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 4

a) Beweisen Sie den *Cauchyschen Verdichtungssatz:*

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende, reelle Folge mit $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konvergiert.}$$

Folgt dies auch, wenn man statt der Monotonie nur $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ voraussetzt?

b) Es sei $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, wobei $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Setze für $x \geqslant 0$: $x^\alpha := \sqrt[q]{x^p}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Teil **a)**, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ genau dann konvergiert, wenn $\alpha > 1$ ist.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + - \dots$$

konvergiert, die daraus durch Umordnung entstehende Reihe

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + + - \dots$$

jedoch divergiert.

Aufgabe 6

Berechnen Sie für $q \in (0,1)$ den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)q^n$.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst das Cauchyprodukt von $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit sich selbst. Bilden Sie dann das Cauchyprodukt dieser Reihe mit $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

Aufgabe 7

Für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiere $a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dass aber das Cauchyprodukt der Reihe mit sich selbst divergiert.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Reihenglieder des Cauchyprodukts keine Nullfolge bilden.

Aufgabe 8

Für welche $z \in \mathbb{C}$ liegt Konvergenz vor?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}}$

Aufgabe 9 (P)

a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen. Zeigen Sie: Sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ konvergent, dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent.

b) Beweisen Sie, dass aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ folgt.

Aufgabe 10 (P)

Die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei monoton fallend und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiere. Zeigen Sie:

$$n \cdot a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Folgt dies auch, wenn man statt der Monotonie nur $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ voraussetzt?

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **3, 4, 6 und 7**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.