Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2009/10
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Wir zeigen mit vollständiger Induktion:

$$\text{Für alle } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ ist } \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n \text{ konvergent, mit dem Wert } \frac{1}{(1-z)^{k+1}}.$$

Induktionsanfang: Für $k = 0$ haben wir wegen $\binom{n+k}{n} = \binom{n}{n} = 1$ die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ vor uns. Diese ist bekanntlich absolut konvergent und hat den Wert $\frac{1}{1-z}$.
Induktionsschluss: Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ beliebig. Für dieses k konvergiere $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n$, mit dem Wert $\frac{1}{(1-z)^{k+1}}$ (IV). Wir bilden das Cauchyprodukt der zwei Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n$ konvergent mit Wert $\frac{1}{(1-z)^{k+1}}$ und, da die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ absolut konvergiert, ist das Cauchyprodukt dieser Reihen nach Satz 10 in 8.4 konvergent und hat als Wert das Produkt der beiden Reihenwerte:

$$\frac{1}{(1-z)^{k+2}} = \frac{1}{(1-z)^{k+1}} \cdot \frac{1}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} \binom{m+k}{m} z^m z^{n-m} \right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} \binom{m+k}{m} \right) z^n .$$

Die Induktionsbehauptung ist gezeigt, wenn wir noch $\sum_{m=0}^{n} \binom{m+k}{m} = \binom{n+k+1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ beweisen. Dazu verwenden wir vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:
Induktionsanfang: Für $n = 0$ steht links $\binom{k}{0} = 1$ und rechts $\binom{k+1}{0} = 1$.
Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Für dieses n gelte $\sum_{m=0}^{n} \binom{m+k}{m} = \binom{n+k+1}{n}$ (IV). Dann folgt

$$\sum_{m=0}^{n+1} \binom{m+k}{m} = \sum_{m=0}^{n} \binom{m+k}{m} + \binom{n+1+k}{n+1} \overset{\text{IV}}{=} \binom{n+k+1}{n} + \binom{n+k+1}{n+1} \overset{5 \text{ in } 5.4}{=} \binom{n+k+2}{n+1} = \binom{(n+1)+k+1}{n+1}.$$

Wegen $\binom{n+1}{n} = n+1$ und $\binom{n+2}{n} = \frac{(n+2)!}{n!\,(n+2-n)!} = \frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ wissen wir nun

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) z^n = \frac{2}{(1-z)^3}.$$

Daraus folgt dann wegen $n^2 = (n+2)(n+1) - 3(n+1) + 1$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) z^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$
$$= \frac{2}{(1-z)^3} - \frac{3}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-z} = \frac{2 - 3(1-z) + (1-z)^2}{(1-z)^3} = \frac{z^2+z}{(1-z)^3}$$

und wegen $2n+1 = 2(n+1)-1$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)z^{2n} &= -z^0 + \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(z^2)^n = -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z^2)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(z^2)^n \\ &= -1 + \frac{2}{(1-z^2)^2} - \frac{1}{1-z^2} = \frac{-(1-z^2)^2 + 2 - (1-z^2)}{(1-z^2)^2} = \frac{3z^2 - z^4}{(1-z^2)^2}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Wir bestimmen zunächst die Polardarstellung von $1+i\sqrt{3}$: Der Betrag dieser Zahl ist

$$\left|1+i\sqrt{3}\,\right| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\,\right)^2} = \sqrt{4} = 2\,,$$

und nun gilt es noch, das Argument von $1+i\sqrt{3}$ zu finden, d.h. $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit

$$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\varphi} = 2\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big)\,, \qquad \text{also} \qquad \cos\varphi = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,.$$

Dies ist genau für $\varphi = \frac{1}{3}\pi$ der Fall; damit ist $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$. Mit einer ähnlichen Herleitung erhalten wir $1-i = \sqrt{2}(\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\,\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Also gilt für $m, n \in \mathbb{N}$

$$(1+i\sqrt{3}\,)^m = (1-i)^n \quad \Leftrightarrow \quad 2^m e^{i\pi m/3} = 2^{n/2}e^{-i\pi n/4}\,. \tag{$*$}$$

Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn ihre Beträge übereinstimmen und sich ihre Argumente nur um ganzzahlige Vielfache von 2π unterscheiden. D.h. $(*)$ gilt genau dann, wenn

$$\left|2^m e^{i\pi m/3}\right| = \left|2^{n/2}e^{-i\pi n/4}\right| \quad \text{und} \quad \pi m/3 = -\pi n/4 + 2k\pi \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

Die erste Gleichung besagt $2^m = 2^{n/2}$, also $n = 2m$. Die zweite führt auf die Bedingung $\pi\,\frac{m}{3} = -\pi\,\frac{n}{4} + 2k\pi = -\pi\,\frac{2m}{4} + 2k\pi$ bzw. $m\,\frac{5}{12} = k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Zusammenfassend haben wir

$$\big\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid (1+i\sqrt{3}\,)^m = (1-i)^n\big\} = \big\{(m,n) \mid (m,n) \in \mathbb{N}^2 \text{ mit } m = \tfrac{12}{5}\,k, n = \tfrac{24}{5}\,k \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}\big\}.$$

Aufgabe 3

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\zeta := e^{2\pi i/n}$. Wir betrachten die Gleichung $z^n = 1$ bzw. $z^n - 1 = 0$. Nach Satz 5 aus 6.4 der Vorlesung hat diese Gleichung genau die Lösungen $\cos(\frac{2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{2k\pi}{n}) = e^{2\pi ik/n} = \zeta^k$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Damit zerfällt das normierte Polynom $z^n - 1$ in ein Produkt aus Linearfaktoren

$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \zeta^k) = (z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z - \zeta^k)\,.$$

Aufgabe 4

a) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n!} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx) + i\sin(nx)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{ix})^n}{n!} \\ &= e^{(e^{ix})} = e^{\cos(x) + i\sin(x)} = e^{\cos(x)}e^{i\sin(x)} \\ &= e^{\cos(x)}\big[\cos(\sin(x)) + i\sin(\sin(x))\big] \\ &= e^{\cos(x)}\,\cos(\sin(x)) + i\,e^{\cos(x)}\,\sin(\sin(x)).\end{aligned}$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil ergibt die Identitäten

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n!} = e^{\cos(x)}\cos(\sin(x)) \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n!} = e^{\cos(x)}\sin(\sin(x)).$$

b) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Mit Hilfe der geometrischen Summenformel und der Definition des Sinus erhalten wir einerseits

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) &= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im} e^{ikx} = \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} (e^{ix})^k \overset{l=k-1}{=} \operatorname{Im} e^{ix} \sum_{l=0}^{n-1} (e^{ix})^l = \operatorname{Im} e^{ix} \, \frac{1-(e^{ix})^n}{1-e^{ix}} \\
&= \operatorname{Im} \frac{e^{ix/2}}{e^{-ix/2}} \, \frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = \operatorname{Im} \frac{e^{ix/2} - e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} = \operatorname{Im} \frac{\left(e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{ix/2}\right) \cdot \frac{1}{2i}}{\left(e^{ix/2} - e^{-ix/2}\right) \cdot \frac{1}{2i}} \\
&= \operatorname{Im} \frac{\left(\cos((n+\frac{1}{2})x) + i\sin((n+\frac{1}{2})x) - \cos(x/2) - i\sin(x/2)\right) \cdot \frac{1}{2i}}{\sin(x/2)} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}\cos((n+\frac{1}{2})x) + \frac{1}{2}\cos(x/2)}{\sin(x/2)}
\end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
\sin(\tfrac{n}{2}\,x)\,\sin(\tfrac{n+1}{2}\,x) &= \tfrac{1}{2i}\left(e^{i\,\frac{n}{2}\,x} - e^{-i\,\frac{n}{2}\,x}\right) \cdot \tfrac{1}{2i}\left(e^{i\,\frac{n+1}{2}\,x} - e^{-i\,\frac{n+1}{2}\,x}\right) \\
&= -\tfrac{1}{4}\left(e^{i(\frac{n}{2}+\frac{n+1}{2})x} - e^{i(\frac{n}{2}-\frac{n+1}{2})x} - e^{i(-\frac{n}{2}+\frac{n+1}{2})x} + e^{-i(\frac{n}{2}+\frac{n+1}{2})x}\right) \\
&= -\tfrac{1}{4}\left(e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i\,\frac{1}{2}\,x} - e^{i\,\frac{1}{2}\,x} + e^{-i(n+\frac{1}{2})x}\right) \\
&= -\tfrac{1}{2}\left(\cos((n+\tfrac{1}{2})x) - \cos(\tfrac{1}{2}\,x)\right) = -\tfrac{1}{2}\cos((n+\tfrac{1}{2})x) + \tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{1}{2}\,x)\,.
\end{aligned}$$

Setzt man dies in den Zähler des Bruchs ein, so ergibt sich die behauptete Gleichung.

Aufgabe 5

a) Definitionsgemäß gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots$$

Sei $x \in [0,2]$. Für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ schreiben wir $a_k := \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ und zeigen, dass die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ monoton fallend ist:

$$a_{k+1} \leqslant a_k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} \leqslant \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leqslant \frac{(2k+3)!}{(2k+1)!} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leqslant (2k+3)(2k+2)\,.$$

Wegen $x^2 \leqslant 4$ und $6 \leqslant (2k+3)(2k+2)$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist die letzte Ungleichung erfüllt. Außerdem stellt $(a_k)_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ eine Nullfolge dar. Deshalb können wir das Leibnizkriterium (Satz 9 a) in 7.7) verwenden. Dieses liefert

$$s_{2n+1} \leqslant \sin(x) \leqslant s_{2n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,,$$

wobei $s_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ die n-te Partialsumme bezeichne. Für $n = 0$ ergibt sich

$$x - \frac{x^3}{6} = s_1 \leqslant \sin(x) \leqslant s_0 = x\,.$$

b) Mit

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \ldots$$

ergibt sich

$$1 - \frac{x^2}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{x^{4j}}{(4j)!} - \frac{x^{4j+2}}{(4j+2)!} \right) = \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \sum_{j=2}^{\infty} \left(-\frac{x^{4j-2}}{(4j-2)!} + \frac{x^{4j}}{(4j)!} \right).$$

Sei $x \in [0,2]$. Setze $b_k := \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wir zeigen, dass $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist:

$$b_{k+1} \leqslant b_k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \leqslant \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leqslant (2k+2)(2k+1)\,.$$

Da die letzte Ungleichung wegen $x^2 \leqslant 4$ und $12 \leqslant (2k+2)(2k+1)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, ist $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend. Daher gilt $b_{2j} \geqslant b_{2j+1}$ bzw. $0 \leqslant b_{2j} - b_{2j+1}$ für alle $j \in \mathbb{N}$, so dass

$$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}(b_{2j} - b_{2j+1}) = \cos(x)$$

folgt. Wegen $0 \geqslant -b_{2j-1} + b_{2j}$ für alle $j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ergibt sich außerdem

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \geqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \sum_{j=2}^{\infty}(-b_{2j-1} + b_{2j}) = \cos(x)\,.$$

Alternativ: Man kann auch mit einer ähnlichen Rechnung wie in **a)** $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \leqslant 1 - \cos(x) \leqslant \frac{x^2}{2}$ für alle $x \in [0,2]$ zeigen, woraus die behauptete Abschätzung folgt.

Aufgabe 6

Die Eigenschaft **i)** (bzw. **ii)**) besagt, dass die Funktion f (bzw. g) in 2 stetig ist (vgl. Definition 10.1). In Teil **a)** (bzw. **b)**) sollen wir anhand der Definition der Stetigkeit begründen, dass auch die Funktion $f + g$ (bzw. f/g) in 2 stetig ist.

a) Sei $\varepsilon \in (0,1)$. Ist $\delta = \min\big\{(\varepsilon/2)^2,\ \sin^2((\varepsilon/2)^2/9) + \varepsilon/2\big\}$, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| < \delta$

$$\big|f(x) + g(x) - 6\big| = \big|f(x) - 2 + g(x) - 4\big| \leqslant \big|f(x) - 2\big| + \big|g(x) - 4\big| \overset{\textbf{i), ii)}}{<} \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,.$$

b) Sei $\varepsilon \in (0,1)$. Ist $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| < \varepsilon^2$, so folgt wegen $|g(x)-4| < \varepsilon$, d.h. $4-\varepsilon < g(x) < 4+\varepsilon$,

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{4 - g(x)}{4g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{4(4-\varepsilon)} \overset{\varepsilon\in(0,1)}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{12}\,.$$

Wähle $\delta = \min\big\{\varepsilon^2,\ \sin^2(\varepsilon^2/9) + \varepsilon\big\}$, dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| < \delta$ unter Verwendung von $|f(x)| = |2 + f(x) - 2| \leqslant 2 + |f(x) - 2| \leqslant 2 + \varepsilon$

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{1}{2}\right| &= \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)}{4} + \frac{f(x)}{4} - \frac{2}{4}\right| \leqslant |f(x)|\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{4}\right| + \frac{1}{4}\big|f(x) - 2\big| \\ &\leqslant (2+\varepsilon)\,\frac{\varepsilon}{12} + \frac{1}{4}\,\varepsilon \leqslant 3\,\frac{\varepsilon}{12} + \frac{1}{4}\,\varepsilon = \frac{1}{2}\,\varepsilon < \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Wahl von $\delta = \delta(\varepsilon)$ ist nicht eindeutig. Beispielsweise könnte man im **b)**-Teil auch $\delta = \frac{5}{6}\min\{\varepsilon^2,\ \sin^2(\varepsilon^2/9) + \varepsilon\}$ oder $\delta = \frac{1}{1111}\min\{\varepsilon^2,\ \sin^2(\varepsilon^2/9) + \varepsilon\}$ nehmen. Beide Bedingungen stellen nämlich sicher, dass sowohl $\delta \leqslant \varepsilon^2$ als auch $\delta \leqslant \sin^2(\varepsilon^2/9) + \varepsilon$ gelten und deshalb mit $|x-2| < \delta$ auch $|x-2| < \varepsilon^2$ und $|x-2| < \sin^2(\varepsilon^2/9) + \varepsilon$ erfüllt sind.

Aufgabe 7

a) Es gilt $f(0) = b$ und $f(2) = c - 2$. Aus $f(0) = f(2) = 0$ folgt daher $b = 0$ und $c = 2$. Auf $(-\infty,1)$ und auf $(1,\infty)$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Gemäß Satz 1 in 10.1 ist f stetig in 1 genau dann, wenn

$$\lim_{x\to1-} f(x) = f(1) = \lim_{x\to1+} f(x)$$

gilt. Nun haben wir

$$\lim_{x\to1-} f(x) = 2 + a = f(1) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to1+} f(x) = 2 - 1 = 1\,;$$

also ist f genau für $a = -1$ stetig.

b) Als Komposition stetiger Funktionen ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig. Für die stetige Fortsetzbarkeit nach $\mathbb{R}$ muss für jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sein und denselben Grenzwert a haben. Jedoch etwa $x_n = \frac{1}{n\pi}$ führt auf $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ und $\widetilde{x}_n = \frac{1}{\pi/2+2n\pi}$ auf $\lim_{n\to\infty} f(\widetilde{x}_n) = 1$. Daher existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$ nicht, so dass es kein $a \in \mathbb{R}$ wie gewünscht gibt.

Aufgabe 8 (P)

Es gilt nur dann $f_n(x) \neq 0$, wenn

$$n - n^2|x - \tfrac{1}{n}| > 0 \quad\Leftrightarrow\quad |x - \tfrac{1}{n}| < \tfrac{1}{n} \quad\Leftrightarrow\quad -\tfrac{1}{n} < x - \tfrac{1}{n} < \tfrac{1}{n} \quad\Leftrightarrow\quad 0 < x < \tfrac{2}{n}.$$

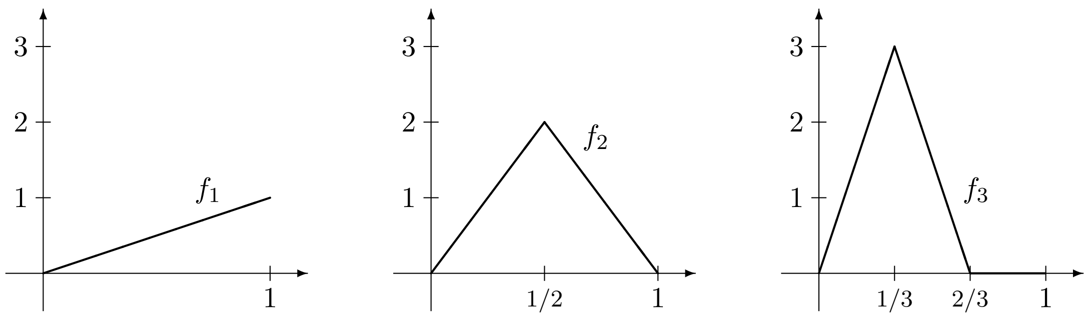
Für $0 < x \leqslant \frac{1}{n}$ gilt

$$f(x) = n - n^2(\tfrac{1}{n} - x) = n^2 x,$$

und für $\frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}$ ergibt sich

$$f(x) = n - n^2(x - \tfrac{1}{n}) = 2n - n^2 x.$$

Wir erhalten die folgenden Schaubilder:



(Man beachte, dass der Maßstab auf x- und y-Achse unterschiedlich gewählt ist und dass zum Schaubild von f_3 auch der Abschnitt der x-Achse zwischen $\frac{2}{3}$ und 1 gehört.)
Berechnen wir noch die Grenzwerte:
Oben haben wir schon festgestellt, dass $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Folglich haben wir trivialerweise $f_n(0) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
Oben hatten wir auch gesehen, dass $f_n(x) = 0$ für alle $x \geqslant \frac{2}{n}$ gilt. Für jedes $x \in (0,1]$ gilt daher: Ist $n \geqslant \frac{2}{x}$, so folgt $f_n(x) = 0$. Die Folge $(f_n(x))$ ist also ab einem gewissen Index konstant 0. Dies liefert $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für alle $x \in (0,1]$, insbesondere also für die beiden gegebenen Werte $x = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{1}{100}$.
Beim letzten Grenzwert ist auch das Argument von n abhängig; hier ergibt sich

$$f_n(\tfrac{1}{n}) = \max\{n - n^2|\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n}|, 0\} = \max\{n, 0\} = n \xrightarrow{n\to\infty} \infty. \qquad (*)$$

Wir haben nachgerechnet, dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für jedes $x \in [0,1]$ gilt. Daher konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ punktweise gegen die Nullfunktion.
Allerdings liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor: Gemäß Definition konvergiert die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen die Nullfunktion, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0\ \forall x \in [0,1] : \quad |f_n(x) - 0| < \varepsilon$$

erfüllt ist. Negation liefert die Bedingung, dass die Funktionenfolge (f_n) nicht gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen die Nullfunktion konvergiert:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant n_0\ \exists x \in [0,1] : \quad |f_n(x)| \geqslant \varepsilon.$$

Aufgrund von $(*)$ ist diese Bedingung erfüllt (wähle z.B. $\varepsilon = 1/2$, $n = n_0$, $x = 1/n_0$), d.h. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig.

Bemerkung: Diese Aufgabe ist ein eindrucksvolles Beispiel dafür, dass bei einer (punktweise) konvergenten Folge stetiger Funktionen f_n aus der Stetigkeit der Grenzfunktion im allgemeinen **nicht** die Gleichmäßigkeit der Konvergenz folgt.

Aufgabe 9 (P)

Da die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf D gleichmäßig gegen f konvergiert, finden wir zu $\varepsilon = 1$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| < 1$ für alle $x \in D$. Da f_n beschränkt ist, finden wir $M \in \mathbb{R}$ mit $|f_n(x)| \leqslant M$ für alle $x \in D$. Dann gilt für jedes $x \in D$

$$|f(x)| = |f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leqslant M + 1.$$

Also ist f beschränkt.