Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2009/10
10.12.2009

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

8. Übungsblatt

Aufgabe 1

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}}$$

gilt. Berechnen Sie damit für $|z| < 1$ die Werte der Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) z^{2n} .$$

Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^2 = (n+2)(n+1) - 3(n+1) + 1$ und $2n+1 = 2(n+1) - 1$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$, die $(1 + i\sqrt{3}\,)^m = (1-i)^n$ erfüllen.

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$. Setze $\zeta := e^{2\pi i/n}$. Zeigen Sie, dass $\prod\limits_{k=0}^{n-1} (z - \zeta^k) = z^n - 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!} = \cos(\sin(x))\, e^{\cos(x)} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!} = \sin(\sin(x))\, e^{\cos(x)}.$$

Hinweis: Betrachten Sie den Real- und Imaginärteil von $e^{(e^{ix})}$.

b) Verifizieren Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin(\frac{n}{2}\,x)\,\sin(\frac{n+1}{2}\,x)}{\sin(\frac{1}{2}\,x)} .$$

Aufgabe 5

Zeigen Sie mit Hilfe des Leibnizkriteriums, dass für alle $x \in [0, 2]$ gilt:

a) $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x\,;$

b) $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}\,.$

— bitte wenden —

Aufgabe 6

Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Funktionen mit den Eigenschaften: Für alle $\varepsilon \in (0,1)$ gilt:

i) Aus $|x-2| < \sin^2(\varepsilon^2/9) + \varepsilon$ folgt $|f(x) - 2| < \varepsilon$.

ii) Aus $|x-2| < \varepsilon^2$ folgt $|g(x) - 4| < \varepsilon$.

Geben Sie zu jedem $\varepsilon \in (0,1)$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \infty)$ an mit

a) $\big|f(x) + g(x) - 6\big| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| < \delta$.

b) $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| < \delta$.

Aufgabe 7

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) := \begin{cases} 2x^2 + ax + b & \text{für } x \leqslant 1, \\ c - x & \text{für } x > 1. \end{cases}$

Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass f stetig ist und zudem $f(0) = f(2) = 0$ gilt.

b) Ist $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ stetig fortsetzbar nach $\mathbb{R}$, d.h. existiert ein $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ a & \text{für } x = 0 \end{cases}$ stetig ist?

Aufgabe 8 (P)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) := \max\bigl\{n - n^2|x - \tfrac{1}{n}|,\, 0\bigr\}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Skizzieren Sie die Schaubilder von f_1, f_2, f_3 und berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0), \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(\tfrac{1}{2}), \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(\tfrac{1}{100}), \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(\tfrac{1}{n}).$$

Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 9 (P)

Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ und $f, f_n\colon D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, Funktionen. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere auf D gleichmäßig gegen f. Zeigen Sie: Sind alle f_n beschränkt, so ist auch f beschränkt.

Klausur zur HM I: Dienstag, 02.03.2010, 08:00 - 10:00 Uhr
Anmeldeschluss: Freitag, 12.02.2010 (Vorlesungsende WS 09/10)
Informationen zur Prüfungsanmeldung entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage

www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm1etechphys2009w/.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1, 4 und 5**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.