Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2009/10

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Dieser Grenzwert existiert; es gilt

$$\lim_{x\to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{x-9} = \lim_{x\to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9} \frac{-1}{\sqrt{x}+3} = \frac{-1}{\sqrt{9}+3} = -\frac{1}{6}\,.$$

b) Für $x \neq 1$ gilt wegen $1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$ [Diese Gleichheit erhält man mit Hilfe der geometrischen Summenformel oder der Polynomdivision $(1-x^3):(1-x)$.]

$$\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{(1+x+x^2)-3}{1-x^3} = \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\frac{x+2}{1+x+x^2}\,.$$

Damit ergibt sich für den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = \lim_{x\to 1} -\frac{x+2}{1+x+x^2} = -\frac{1+2}{1+1+1^2} = -\frac{3}{3} = -1\,.$$

c) Setzen wir zur Abkürzung $a := \sqrt[3]{8+x}$ und $b := 2$, so ergibt sich mit der bekannten Gleichung $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ [wieder geometrische Summenformel oder Polynomdivision] die Darstellung

$$\sqrt[3]{8+x} - 2 = a - b = \frac{(\sqrt[3]{8+x}\,)^3 - 2^3}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 2^2} = \frac{x}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 4}\,.$$

Folglich hat man

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 4} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8} + 4} = \frac{1}{12}\,.$$

d) Dieser Grenzwert existiert nicht. Der Zähler des Bruchs hat in $x = 3$ nämlich keine Nullstelle, und wegen $(x^2-x)/(x+2) \to 6/5$ für $x \to 3$ gilt

$$\frac{x^2-x}{x^2-x-6} = \frac{1}{x-3}\cdot\frac{x^2-x}{x+2} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{für } x \to 3+\,, \\ -\infty & \text{für } x \to 3-\,. \end{cases}$$

e) Hier hat der Nenner in $x = 2$ keine Nullstelle, daher gilt

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+7x+2}{x^3-x^2+3x} = \frac{2^2+7\cdot 2+2}{2^3-2^2+3\cdot 2} = \frac{20}{10} = 2\,.$$

f) Zähler und Nenner haben -1 als Nullstelle; Polynomdivision liefert

$$x^2+5x+4 = (x+1)(x+4) \quad \text{und} \quad x^3+x^2+x+1 = (x+1)(x^2+1)\,.$$

Folglich existiert der Grenzwert

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+5x+4}{x^3+x^2+x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x+4)}{(x+1)(x^2+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x+4}{x^2+1} = \frac{-1+4}{(-1)^2+1} = \frac{3}{2}\,.$$

g) Dies ist wieder ein einfacher Fall

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{8x^3+2x^2+1}{2x^3+7x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8+2x^{-1}+x^{-3}}{2+7x^{-2}}=\frac{8}{2}=4\,.$$

h) Für alle $x\geqslant 1$ gilt

$$\sqrt{x\pm 1}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x\pm 1}\,)^2-(\sqrt{x}\,)^2}{\sqrt{x\pm 1}+\sqrt{x}}=\frac{\pm 1}{\sqrt{x\pm 1}+\sqrt{x}}\,,$$

und damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}&=\big(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\big)+\big(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\big)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}\\
&=\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}-(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\,)}=\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\,)}\\
&=\frac{(x-1)-(x+1)}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\,)}\\
&=\frac{-2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\,)}\,.\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}x^{3/2}\Big(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\Big)\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^{3/2}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\,)}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{-2(\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}(\sqrt{1+1/x}+1\,)\,\sqrt{x}(\sqrt{1-1/x}+1\,)\,\sqrt{x}(\sqrt{1-1/x}+\sqrt{1+1/x}\,)}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\big(\sqrt{1+1/x}+1\big)\big(\sqrt{1-1/x}+1\big)\big(\sqrt{1-1/x}+\sqrt{1+1/x}\,\big)}\\
&=\frac{-2}{2\cdot 2\cdot 2}=-\frac{1}{4}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Die Funktion $x\mapsto\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ist als Komposition stetiger Funktionen überall dort stetig, wo sie definiert ist, d.h. außerhalb der Nullstellenmenge des Nenners. Wegen $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$ verschwindet der Nenner für $x=1$ oder $x=3$. Daher ist $x\mapsto\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ auf $\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$ stetig, so dass auch f auf $\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$ stetig ist. Nun gilt $\lim_{x\to 1}f(x)=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}=f(1)$, also ist f auch in der Stelle 1 stetig. Da 3 eine Nullstelle des Nenners und keine Nullstelle des Zählers von $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ist, existiert $\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ nicht. Also ist f in 3 unstetig (unabhängig davon, was der Funktionswert $f(3)$ tatsächlich ist).

b) Wegen $x^2+2x-15=(x-3)(x+5)$ ist dieser Ausdruck für $x\in[-7,-5]$ nichtnegativ, x^3 hingegen negativ, also gilt $f(x)=x^3$ für $x\in[-7,-5]$. Für $x\in[0,3]$ ist $(x-3)(x+5)\leqslant 0$ und $x^3\geqslant 0$, also gilt $f(x)=x^2+2x-15$ für $x\in[0,3]$. Für $x\in[-1,0)$ ist $x^3\in[-1,0)$, aber $x^2+2x-15\leqslant 1+0-15=-14$, also gilt $f(x)=x^2+2x-15$ für $x\in[-1,0)$. Das Minimum zweier stetiger Funktionen g und h ist als Komposition stetiger Funktionen stetig: $\min\{g,h\}=\frac{g+h-|g-h|}{2}$ (vgl. Aufgabe 5 vom 2. Übungsblatt). Daher ist f jedenfalls außerhalb $\{-5,-1\}$ stetig. Da $x^2+2x-15$ und $x+5$ in -1 nicht denselben Wert annehmen sowie x^3 und $x+5$ an der Stelle -5 verschieden sind, ist f an jenen Stellen auch nicht stetig.

Aufgabe 3

a) Als Komposition stetiger Funktionen ist f auf $[-1,1]\setminus\{0\}$ stetig. Für $x\in[-1,1]\setminus\{0\}$ gilt

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\cdot\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-(1-x^2)}{x(1+\sqrt{1-x^2})}=\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,. \tag{1}$$

Demnach gilt $\lim_{x\to0}f(x)=0=f(0)$, und damit ist f auch stetig in 0.

b) Wir zeigen zunächst $|f(x)|\leqslant 1$ für alle $x\in[-1,1]$: Für jedes $x\in[-1,1]\setminus\{0\}$ gilt

$$|f(x)|\overset{(1)}{=}\frac{|x|}{1+\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\geqslant0}}\leqslant|x|\leqslant1.$$

Wegen $f(0)=0$ ist $|f(x)|\leqslant1$ für alle $x\in[-1,1]$ bewiesen. Hieraus folgt $f([-1,1])\subset[-1,1]$.

Nun zeigen wir $[-1,1]\subset f([-1,1])$. Sei dazu $y_0\in[-1,1]$. Wegen $-1=f(-1)$ und $1=f(1)$ ist $y_0\in[f(-1),f(1)]$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0\in[-1,1]$ mit $y_0=f(x_0)\in\{f(x)\mid x\in[-1,1]\}=f([-1,1])$. Da $y_0\in[-1,1]$ beliebig war, folgt $[-1,1]\subset f([-1,1])$.

Insgesamt ergibt sich $f([-1,1])=[-1,1]$.

c) Um die Existenz der Umkehrfunktion von f nachzuweisen, verwenden wir folgendes Resultat: Seien X,Y Mengen und $f:X\to Y$ eine Funktion. Gelingt es, die Gleichung $y=f(x)$ durch Äquivalenzumformungen (!) in die Form $x=g(y)$ zu bringen (wobei $x\in X$, $y\in Y$ und $g:Y\to X$), dann ist f bijektiv und die Umkehrfunktion von f lautet g.

Für $x\in[-1,1]\setminus\{0\}$ gilt

$$\begin{aligned}
y=f(x)\quad&\Longleftrightarrow\quad y=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\quad\Longleftrightarrow\quad 1-xy=\sqrt{1-x^2}\\
\overset{1-xy\geqslant0}{\Longleftrightarrow}\quad&1-2xy+x^2y^2=1-x^2\quad\Longleftrightarrow\quad x^2(1+y^2)=2xy\\
\overset{x\neq0}{\Longleftrightarrow}\quad&x(1+y^2)=2y\quad\Longleftrightarrow\quad x=\frac{2y}{1+y^2}\,.
\end{aligned}$$

Für $x=0$ gilt $y=f(0)=0$, also gilt auch hier $x=\frac{2y}{1+y^2}$. Die Rechnung zeigt: f besitzt eine Umkehrfunktion, die durch

$$f^{-1}:\underbrace{[-1,1]}_{=f([-1,1])}\to[-1,1],\;y\mapsto\frac{2y}{1+y^2}$$

gegeben ist.

d) Seien $x_1,x_2\in[-1,1]$ mit $x_1<x_2$. Zu zeigen ist $f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$. Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
f^{-1}(x_2)-f^{-1}(x_1)&=\frac{2x_2}{1+x_2^2}-\frac{2x_1}{1+x_1^2}=\frac{2x_2(1+x_1^2)-2x_1(1+x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}=\frac{2(x_2-x_1+x_1^2x_2-x_1x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}\\
&=\frac{2(x_2-x_1+x_1x_2(x_1-x_2))}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}=\frac{2(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}>0\,,
\end{aligned}$$

denn wegen $-1\leqslant x_1<x_2\leqslant1$ ist $x_1x_2<1$.

e) Da f^{-1} die Umkehrfunktion von f ist, ist f die Umkehrfunktion von f^{-1}. Da f^{-1} streng monoton wachsend ist, ist es ihre Umkehrfunktion f nach Satz 6 in 10.4 auch.

Aufgabe 4

a) Wir definieren die Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch $h(x) := x - g(x)$. Dann ist h als Komposition stetiger Funktionen stetig. Wegen $g([a,b]) \subset [a,b]$ gilt $h(a) = a - g(a) \leqslant a - a = 0$ und $h(b) = b - g(b) \geqslant b - b = 0$. Daher liegt $y_0 := 0$ zwischen den Funktionswerten $h(a)$ und $h(b)$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es (mind.) ein $x_0 \in [a,b]$ mit $h(x_0) = 0$, d.h. $g(x_0) = x_0$. (Solch ein x_0 heißt *Fixpunkt* von g.)

Bemerkung: Die Aussage ist i.a. falsch, wenn man $[a,b]$ durch das offene Intervall (a,b) ersetzt. Beispielsweise besitzt die Funktion $g\colon (0,1) \to (0,1)$, $g(x) := \frac{1}{2}x$, in $(0,1)$ keinen Fixpunkt, denn aus $g(x) = x$ folgt $x = 0 \notin (0,1)$.

b) Auf dem Intervall $[0,2]$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Zudem ist für $x \geqslant 0$ offenbar $f(x) \geqslant 0$ und $f(x) = \frac{x+3-1}{x+3} = 1 - \frac{1}{x+3} \leqslant 1$. Deshalb gilt für die stetige Funktion $f : [0,2] \to [0,2]$ gemäß **a)**: Es gibt (mindestens) ein $x_0 \in [0,2]$ mit $f(x_0) = x_0$.

c) Wir verifizieren zunächst, dass die Funktion $f : [0,2] \to [0,2]$ monoton wachsend ist. Für alle $x, y \in [0,2]$ gilt nämlich

$$x \leqslant y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x+3} \geqslant \frac{1}{y+3} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{x+3} \leqslant 1 - \frac{1}{y+3} \quad \Rightarrow \quad f(x) \leqslant f(y)\,.$$

Nun zeigen wir, dass die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, definiert durch $y_0 \in [0,2]$ und $y_n := f(y_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$, monoton ist. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall $y_0 \leqslant f(y_0)$: Die Folge (y_n) ist monoton wachsend, d.h. $y_{n-1} \leqslant y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Denn:
IA: $n = 1$. Es ist $y_0 \leqslant f(y_0) = y_1$.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $y_{n-1} \leqslant y_n$ (IV). Da f monoton wachsend ist, folgt

$$y_n = f(y_{n-1}) \overset{\text{IV}}{\leqslant} f(y_n) = y_{n+1}\,.$$

Fall $y_0 > f(y_0)$: Die Folge (y_n) ist monoton fallend, d.h. $y_{n-1} \geqslant y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Dies kann man ähnlich wie eben durch vollständige Induktion beweisen.

Außerdem gilt $y_0 \in [0,2]$ und $y_n = f(y_{n-1}) \in [0,2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist (y_n) beschränkt.

Die beschränkte und monotone Folge $(y_n)_{n \in \cup \{0\}}$ konvergiert nach Monotoniekriterium.

Bemerkung: Macht man in der Rekursionsformel $y_n = f(y_{n-1})$ den Grenzübergang $n \to \infty$ (und beachtet dabei die Stetigkeit von f), so ergibt sich für den Grenzwert a der Folge (y_n) die Gleichung

$$a = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(y_{n-1}) = f(\lim_{n\to\infty} y_{n-1}) = f(a)\,,$$

d.h. a ist Fixpunkt von f. Rechnen wir a aus: Es gilt $a = \frac{a+2}{a+3}$. Nach Multiplikation mit $a+3$ erhält man die quadratische Gleichung $a^2 + 2a - 2 = 0$ in a, die genau für $a = -1 + \sqrt{3}$ oder $a = -1 - \sqrt{3}$ erfüllt ist. Wegen $y_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ muss $a \geqslant 0$ gelten, also $a = -1 + \sqrt{3}$.

Aufgabe 5

a) O.B.d.A. sei $a_{13} > 0$. (Sonst geht man analog vor.) Da 13 eine ungerade Zahl ist, gilt dann $p(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$ und $p(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$. Für ein hinreichend großes $M > 0$ ist daher $p(M) > 13$ und $p(-M) < 13$ erfüllt. Da p stetig ist, liefert der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen: Es gibt mindestens ein $x_0 \in (-M, M)$ mit $p(x_0) = 13$.

b) Nach Satz 7 in 10.4 nimmt die stetige Funktion f auf $[a,b]$ ihr Minimum an, d.h. es gibt ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x) \geqslant f(x_0) > 0$ für alle $x \in [a,b]$. Demzufolge gilt für jedes $x \in [a,b]$

$$\frac{1}{f(x)} \leqslant \frac{1}{f(x_0)} =: C < \infty\,.$$

Die Funktion $\frac{1}{f}$ ist also nach oben durch C beschränkt; eine untere Schranke von $\frac{1}{f}$ ist z.B. 0.

Aufgabe 6

a) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ bijektiv, streng monoton wachsend und stetig ist. Diese Eigenschaften übertragen sich laut Satz 6 in 10.4 auf die Umkehrfunktion $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

b) Für beliebige $x, y \in (0,\infty)$ gilt nach der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$\exp(\ln(xy)) = xy = \exp(\ln(x))\exp(\ln(y)) = \exp(\ln(x) + \ln(y)),$$
$$\exp(\ln(x/y)) = x/y = \exp(\ln(x))(\exp(\ln(y)))^{-1} = \exp(\ln(x))\exp(-\ln(y)) = \exp(\ln(x) - \ln(y)).$$

Wegen der Injektivität von exp ergibt sich $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ und $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$.

c) Wir verwenden

$$\exp(ry) = (\exp(y))^r \qquad \text{für alle } r \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Sind $r \in \mathbb{Q}$ und $x \in (0,\infty)$, dann gilt

$$\exp(\ln(x^r)) = x^r = (\exp(\ln(x))^r \overset{(2)}{=} \exp(r\ln(x)),$$

woraus $\ln(x^r) = r\ln(x)$ wegen der Injektivität von exp folgt.

Es verbleibt, (2) zu begründen: Sei dazu $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir gehen ähnlich vor wie in Aufgabe 8 vom 3. Übungsblatt und zeigen zunächst durch vollständige Induktion: $\exp(my) = (\exp(y))^m$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

IA: Für $m = 1$ ist $\exp(my) = \exp(y) = (\exp(y))^m$ erfüllt.

IS: Sei $m \in \mathbb{N}$. Es gelte $\exp(my) = (\exp(y))^m$ (IV). Dann folgt mit Hilfe der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$\exp((m+1)y) = \exp(my)\exp(y) \overset{\text{IV}}{=} (\exp(y))^m \exp(y) = (\exp(y))^{m+1}.$$

Hiermit erhalten wir für jedes $m \in \mathbb{N}$ nach Folgerung 1) in 9.1

$$(\exp(y))^{-m} = \big((\exp(y))^{-1}\big)^m = \big(\exp(-y)\big)^m = \exp(-my).$$

Da überdies $\exp(0 \cdot y) = 1 = (\exp(y))^0$ gilt, haben wir $\exp(my) = (\exp(y))^m$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ gezeigt (vgl. Folgerung 2) in 9.1).

Außerdem ist für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\exp(y) = \exp(\tfrac{n}{n}\, y) = (\exp(\tfrac{1}{n}\, y))^n\,, \qquad \text{also} \quad (\exp(y))^{1/n} = \exp(\tfrac{1}{n}\, y).$$

Nun sei $r \in \mathbb{Q}$. Dann existieren $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $r = \frac{m}{n}$. Es folgt

$$\exp(ry) = \exp(\tfrac{m}{n}\, y) = (\exp(\tfrac{1}{n}\, y))^m = (\exp(y))^{\frac{m}{n}} = (\exp(y))^r.$$

d) Sei $K \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben. Da ln streng monoton wachsend ist, gilt $\ln(x) > K$ für alle $x > \exp(K)$. Also ist $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$. Daraus folgt

$$\lim_{x\to 0+} \ln(x) = \lim_{y\to\infty} \ln(1/y) = \lim_{y\to\infty} \big(\ln(1) - \ln(y)\big) = -\lim_{y\to\infty} \ln(y) = -\infty.$$

e) Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Für die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n := k\ln(x_n)$ gilt nach **d)** dann ebenfalls $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$. Wegen $x_n^k = \exp(y_n)$ erhalten wir mit Hilfe von Satz 3 in 9.2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k}\, y_n \exp(-y_n) = 0.$$

Also ist $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^k} = 0$. Hiermit ergibt sich

$$\lim_{x\to 0+} x^k \ln(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{-\ln(1/x)}{(1/x)^k} = -\lim_{y\to\infty} \frac{\ln(y)}{y^k} = 0.$$

Aufgabe 7 (P)

a) Es gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $f_n(0) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Für ein fest vorgegebenes $x > 0$ gilt

$$f_n(x) = \frac{x + nx^2 + nx}{1 + nx} = \frac{x/n + x^2 + x}{1/n + x} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{x^2 + x}{x} = x + 1\,.$$

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert also punktweise gegen die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

Auf $[0, \infty)$ ist die Konvergenz nicht gleichmäßig, da die Funktion f in 0 unstetig ist, alle f_n aber stetig sind. (Wäre die Konvergenz gleichmäßig, so würde sich die Stetigkeit der f_n auf die Grenzfunktion f übertragen.)

Auf $[a, \infty)$ mit einem $a > 0$ liegt dagegen gleichmäßige Konvergenz vor. Für jedes $x \in [a, \infty)$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{x + nx^2 + nx}{1 + nx} - (x + 1) \right| = \left| \frac{x + nx^2 + nx - (x + 1)(1 + nx)}{1 + nx} \right| \\ &= \left| \frac{x + nx^2 + nx - x - nx^2 - 1 - nx}{1 + nx} \right| = \left| \frac{-1}{1 + nx} \right| \leqslant \frac{1}{1 + na} =: c_n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,. \end{aligned}$$

Deshalb existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{1+na} \leqslant \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant N$ gilt; für jedes $n \geqslant N$ ist dann also $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a, \infty)\} \leqslant \varepsilon$, d.h. (f_n) konvergiert auf $[a, \infty)$ gleichmäßig gegen f.

Allgemein gilt: Sei $D \neq \emptyset$ und $f, f_n : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, Funktionen. Gilt $|f_n(x) - f(x)| \leqslant c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in D$ und ist $(c_n) \subset \mathbb{R}$ eine (von x unabhängige!) Nullfolge, dann konvergiert (f_n) auf D gleichmäßig gegen f.

b) Es gilt $f_n(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $x \in (0, 1]$, so folgt $|1 - x| < 1$ und damit

$$f_n(x) = (1 - x)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert also punktweise gegen die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Auf $[0, 1]$ ist diese Funktion unstetig, im Gegensatz zu den Funktionen f_n; also kann die Konvergenz auf $[0, 1]$ nicht gleichmäßig sein.

Auf $[\frac{1}{2}, 1]$ liegt jedoch gleichmäßige Konvergenz vor: Für alle $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ gilt wegen $|1 - x| \leqslant \frac{1}{2}$

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = |(1 - x)^n| = |1 - x|^n \leqslant 2^{-n}\,,$$

und wie zuvor bedeutet dies gleichmäßige Konvergenz.

Bemerkung: Auf dem Intervall $(0, 1]$ ist die Konvergenz jedoch nicht gleichmäßig, denn es gilt $\sup\{\,|f_n(x) - f(x)| : x \in (0, 1]\,\} = \sup\{\,|1 - x|^n : x \in (0, 1]\,\} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Offenbar gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in (0, 1]$ ist $q := 1 - x \in [0, 1)$ und es ergibt sich

$$f_n(x) = nxq^n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

(Wegen $\sqrt[n]{nq^n} \to q < 1$ für $n \to \infty$ konvergiert die Reihe über nq^n, was dann $nq^n \to 0$ für $n \to \infty$ impliziert.) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert also punktweise gegen die Funktion $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$.

Obwohl diese Grenzfunktion stetig ist, liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor. Es gilt

$$f_n(\tfrac{1}{n}) = n \cdot \tfrac{1}{n} \cdot (1 - \tfrac{1}{n})^n = (1 - \tfrac{1}{n})^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1}$$

(vgl. Aufgabe 1, 6. Übungsblatt). Dies bedeutet aber, dass $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\}$ nicht gegen 0 konvergiert, z.B. ist $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} = \sup\{|f_n(x)| : x \in [0,1]\} \geqslant \frac{1}{2}e^{-1}$ für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$. Das schließt die gleichmäßige Konvergenz aus.

d) Setzt man $x = 1$ in $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ ein, so ergibt sich der Wert 0. Für jedes $x \in (-1,1)$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} x^n = (1-x)x\sum_{k=0}^{\infty} x^k = x(1-x) \cdot \frac{1}{1-x} = x\,.$$

Die Funktionenreihe konvergiert also punktweise gegen die Funktion $f : (-1,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ x, & x \in (-1,1). \end{cases}$$

Da diese Funktion, im Gegensatz zu den Partialsummenfunktionen $s_N : (-1,1] \to \mathbb{R}$, die durch $s_N(x) := \sum_{n=1}^{N} x^n(1-x)$ gegeben sind, nicht stetig in $x = 1$ ist, liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor.

Bemerkung: Auch auf dem Intervall $(-1,1)$ liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor: Für jedes $N \in \mathbb{N}$ und $x \in (-1,1)$ gilt

$$\Big|s_N(x) - f(x)\Big| = \Big|(1-x)x\sum_{n=0}^{N-1} x^n - x\Big| = \Big|(1-x)x\frac{1-x^N}{1-x} - x\Big| = |-x^{N+1}| = |x|^{N+1}$$

sowie

$$|x|^{N+1} \geqslant \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x| \geqslant \frac{1}{\sqrt[N+1]{2}}\,.$$

Obige Rechnung zeigt: Ist $\varepsilon := \frac{1}{2}$ gesetzt, dann finden wir zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $x \in (-1,1)$ (etwa $x = \frac{1}{\sqrt[N+1]{2}}$) so, dass $|s_N(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$ gilt. Dies schließt gleichmäßige Konvergenz aus.

e) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\left|\frac{1}{x^2+n^2}\right| = \frac{1}{x^2+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}\,.$$

Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, folgt nach Satz 3 (9. Ergänzung): Die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ konvergiert gleichmäßig und damit auch punktweise auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 8 (P)

Um nachzuweisen, dass die Abbildung $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{F}_b(D,\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \|f\|_\infty$, eine Norm auf $\mathcal{F}_b(D,\mathbb{C})$ definiert (Der Punkt in $\|\cdot\|_\infty$ deutet an, dass hier das Argument der Abbildung eingesetzt werden muss, in diesem Fall also Funktionen $f \in \mathcal{F}_b(D,\mathbb{C})$), müssen wir zeigen, dass für alle $f, g \in \mathcal{F}_b(D,\mathbb{C})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

(N1) $\|f\|_\infty = 0 \;\Rightarrow\; f = 0$ (Definitheit);

(N2) $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\,\|f\|_\infty$ (Homogenität);

(N3) $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ (Dreiecksungleichung).

(N1): Zum Beweis von $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0$ ($f = 0$ bedeutet, dass f mit der Nullfunktion übereinstimmt, d.h. $f(x) = 0$ für alle $x \in D$.) zeigen wir die äquivalente Aussage $f \neq 0 \Rightarrow \|f\|_\infty \neq 0$. Sei dazu $f \neq 0$, d.h. nicht die Nullfunktion. Dann gibt es ein $x_0 \in D$ mit $f(x_0) \neq 0$. Es folgt

$$\sup\{|f(z)| : z \in D\} \geqslant |f(x_0)| > 0, \quad \text{d.h.} \quad \|f\|_\infty \neq 0.$$

(N2): Für jedes $f \in \mathcal{F}_b(D, \mathbb{C})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ rechnen wir nach

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup\{|\lambda f(z)| : z \in D\} = \sup\{|\lambda| \cdot |f(z)| : z \in D\} = |\lambda| \sup\{|f(z)| : z \in D\} = |\lambda| \, \|f\|_\infty.$$

(N3): Für alle $f, g \in \mathcal{F}_b(D, \mathbb{C})$ gilt

$$\begin{aligned} \|f + g\|_\infty &= \sup\{|f(z) + g(z)| : z \in D\} \leqslant \sup\{|f(z)| + |g(z)| : z \in D\} \\ &\leqslant \sup\{\|f\|_\infty + \|g\|_\infty : z \in D\} = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Bemerkung: In (N1) wurde auf die Forderung $\|f\|_\infty \geqslant 0$ für alle $f \in \mathcal{F}_b(D, \mathbb{C})$ verzichtet, weil dies aus (N2) und (N3) folgt: Es ist nämlich

$$\|\mathbf{0}\|_\infty = \|0 \cdot \mathbf{0}\|_\infty \overset{\text{(N2)}}{=} |0| \cdot \|\mathbf{0}\|_\infty = 0 \cdot \|\mathbf{0}\|_\infty = 0$$

und für jedes $f \in \mathcal{F}_b(D, \mathbb{C})$ gilt

$$0 = \|\mathbf{0}\|_\infty = \|f + (-f)\|_\infty \overset{\text{(N3)}}{\leqslant} \|f\|_\infty + \|(-1) \cdot f\|_\infty \overset{\text{(N2)}}{=} \|f\|_\infty + |(-1)| \cdot \|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty,$$

also $\|f\|_\infty \geqslant 0$. (Hierbei bezeichnet $\mathbf{0}$ die Nullfunktion $\mathbf{0}\colon D \to \mathbb{C}, x \mapsto 0$, und 0 die Zahl $0 \in \mathbb{C}$.)

Aufgabe 9 (Der gestresste Weihnachtsmann)

Fragen Sie den Weihnachtsmann…