Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2009/10
17.12.2010

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

9. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{3-\sqrt{x}}{x-9}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x}{x^2-x-6}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+7x+2}{x^3-x^2+3x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+5x+4}{x^3+x^2+x+1}$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{8x^3+2x^2+1}{2x^3+7x}$ **h)** $\lim\limits_{x\to \infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Stetigkeitsstellen der folgenden Funktionen:

a) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{für } x\notin\{1,3\} \\ \frac{1}{2} & \text{für } x=1 \\ 0 & \text{für } x=3 \end{cases}$

b) $f\colon [-7,3]\to\mathbb{R},\ x\mapsto \begin{cases} \min\{x^2+2x-15,\ x^3\} & \text{für } x\in[-7,-5]\cup[-1,3] \\ x+5 & \text{für } x\in(-5,-1) \end{cases}$

Aufgabe 3

Die Funktion $f\colon [-1,1]\to\mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{für } 0<|x|\leqslant 1, \\ 0 & \text{für } x=0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1,1])$ von f.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $|f(x)|\leqslant 1$ für alle $x\in[-1,1]$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie f^{-1}.

d) Begründen Sie, dass f^{-1} streng monoton wachsend ist.

e) Ist f streng monoton wachsend? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4

Die Funktion $f\colon [0,2]\to\mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$.

a) Beweisen Sie zunächst folgende Aussage: Ist eine Funktion $g\colon [a,b]\to[a,b]$ stetig, so gibt es mindestens ein $x_0\in[a,b]$ mit $g(x_0)=x_0$.

b) Wenden Sie **a)** auf f an, um zu zeigen, dass ein $x_0\in\mathbb{R}$ existiert mit $f(x_0)=x_0$.

c) Nun sei $y_0\in[0,2]$ fest vorgegeben. Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ werde rekursiv definiert durch $y_n := f(y_{n-1})$ für $n\in\mathbb{N}$. Konvergiert diese Folge?

Aufgabe 5

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ist $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_{13}x^{13} + a_{12}x^{12} + \cdots + a_1 x + a_0$, wobei $a_0, \ldots, a_{13} \in \mathbb{R}$ mit $a_{13} \neq 0$, dann hat die Gleichung $p(x) = 13$ mindestens eine (reelle) Lösung.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wenn die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist und $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt, dann ist die Funktion $1/f$ beschränkt.

Aufgabe 6

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die reelle Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ bijektiv ist. Die somit existierende Umkehrfunktion heißt *(natürlicher) Logarithmus* $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Weisen Sie die folgenden Eigenschaften nach:

a) $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und stetig.

b) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ und $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$ für alle $x, y \in (0,\infty)$.

c) $\ln(x^r) = r \cdot \ln(x)$ für alle $x \in (0,\infty)$ und $r \in \mathbb{Q}$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty$.

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} \ln(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0+} x^k \ln(x) = 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 7 (P)

Untersuchen Sie die nachstehenden Funktionenfolgen bzw. Funktionenreihen in den angegebenen Intervallen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

a) $f_n(x) = \dfrac{x + nx^2 + nx}{1 + nx}$ auf $I_1 = [0,\infty)$ bzw. auf $I_2 = [a,\infty)$ mit einem $a > 0$

b) $f_n(x) = (1-x)^n$ auf $I_1 = [0,1]$ bzw. auf $I_2 = [\frac{1}{2}, 1]$

c) $f_n(x) = nx(1-x)^n$ auf $I = [0,1]$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ auf $I = (-1,1]$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ auf $I = \mathbb{R}$

Aufgabe 8 (P)

Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}$ und $\mathcal{F}_b(D,\mathbb{C})$ die Menge aller beschränkten Funktionen auf D mit Werten in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $\mathcal{F}_b(D,\mathbb{C})$ definiert, wobei $\|f\|_\infty := \sup\{|f(z)| : z \in D\}$.

Aufgabe 9 (Der gestresste Weihnachtsmann)

Der Weihnachtsmann stellt vor jedes Haus in der Hunderthäuserstraße ein rotes Paket ab. Dann findet er es etwas langweilig, weshalb er sogleich bei jedem zweiten Haus das rote durch ein weißes Paket austauscht. Noch immer nicht zufrieden geht er erneut durch die Straße und tauscht bei jedem dritten Haus weiße Pakete durch rote und rote Pakete durch weiße. Dann bei jedem vierten, fünften usw., bis er schließlich beim hundertsten Haus das Paket ein letztes Mal tauscht. Als der Weihnachtsmann in die Viertausendhäuserstraße einbiegt, greift er zum Handy und ruft Sie an. Er möchte wissen, vor welche Häuser er weiße und vor welche er rote Pakete legen müsse, um dasselbe Ergebnis wie zuvor zu erhalten, ohne den riesigen Aufwand betreiben zu müssen. Hoffentlich können Sie dem Weihnachtsmann weiterhelfen, ansonsten fehlt ihm die Zeit, bei Ihnen die Geschenke vorbeizubringen...

Frohe Weihnachten und ein gutes und erfolgreiches neues Jahr 2010!

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **3, 4 und 6**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.