Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2009/10

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die Funktion g geht aus f durch Verschieben um 2π nach rechts hervor, h durch Spiegeln an der Geraden $x = -\frac{\pi}{2}$. Da f bijektiv ist, sind es g und h auch. Deshalb existieren g^{-1} und h^{-1}.

Für jedes $x \in [\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi]$ gilt aufgrund der 2π-Periodizität des Sinus

$$y := g(x) = \sin x = \sin(\underbrace{x - 2\pi}_{\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}) = f(x - 2\pi).$$

Daher sind $x = g^{-1}(y)$ und $x - 2\pi = f^{-1}(y)$, woraus $g^{-1}(y) = f^{-1}(y) + 2\pi$ folgt. Also

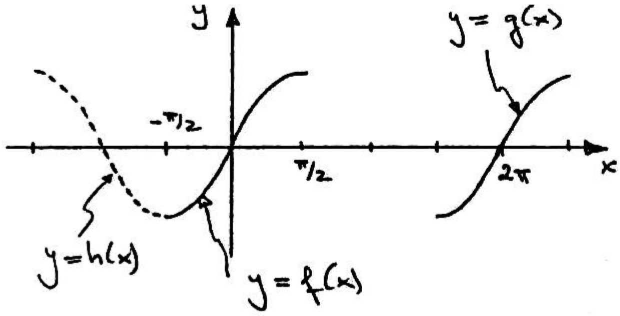
$$g^{-1}\colon [-1,1] \to [\tfrac{3}{2}\pi, \tfrac{5}{2}\pi], \quad y \mapsto \mathrm{Arcsin}(y) + 2\pi.$$

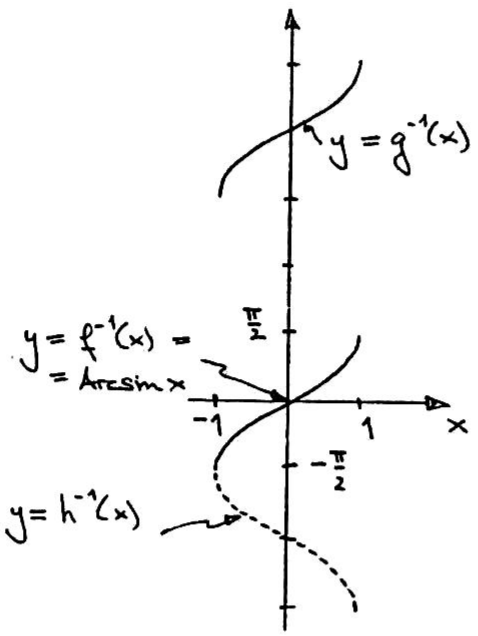
Für $x \in [-\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi]$ erhalten wir

$$y := h(x) = \sin x \overset{(*)}{=} -\sin(\underbrace{x + \pi}_{\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}) = -f(x + \pi).$$

[Die Gleichheit in $(*)$ folgt aus geometrischen Überlegungen oder mit Hilfe des Additionstheorems: $\sin(x+\pi) = \sin(x)\cos(\pi) + \cos(x)\sin(\pi) = -\sin x$.] Also ist einerseits $x = h^{-1}(y)$ und andererseits $x + \pi = f^{-1}(-y)$. Zusammen folgt $h^{-1}(y) = f^{-1}(-y) - \pi = -f^{-1}(y) - \pi$, weil f^{-1} eine ungerade Funktion ist, denn für $y = f(x)$ gilt $f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) \overset{f \text{ ungerade}}{=} f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y)$. Also

$$h^{-1}\colon [-1,1] \to [-\tfrac{3}{2}\pi, -\tfrac{1}{2}\pi], \quad y \mapsto -\mathrm{Arcsin}(y) - \pi.$$





Aufgabe 2

Die Funktionen *Cosinus hyperbolicus* und *Sinus hyperbolicus* sind definiert durch

$$\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \qquad \sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ sind die Potenzreihen

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^k \qquad \text{und} \qquad e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\, x^k$$

(absolut) konvergent, daher konvergieren nach Satz 3 in 8.2 auch deren Summe bzw. Differenz:

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\, x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}\,\frac{1}{2}\big(1 + (-1)^k\big)\, x^k\right) \overset{n=2k}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$
$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\, x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}\,\frac{1}{2}\big(1 - (-1)^k\big)\, x^k\right) \overset{n=2k+1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Insbesondere ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihen ∞.

b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

i)

$$\cosh(-x) = \tfrac{1}{2}(e^{-x} + e^{-(-x)}) = \cosh x\,; \quad \sinh(-x) = \tfrac{1}{2}(e^{-x} - e^{-(-x)}) = -\sinh x\,;$$

(d.h. cosh ist eine gerade und sinh eine ungerade Funktion)

ii)

$$\begin{aligned}\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \big(\tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})\big)^2 - \big(\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})\big)^2 \\ &= \tfrac{1}{4}\big((e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x})\big) = \tfrac{1}{4}\, 4e^0 = 1\,;\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\cosh(x)\, \cosh(y) + \sinh(x)\, \sinh(y) &= \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})\, \tfrac{1}{2}(e^y + e^{-y}) + \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})\, \tfrac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \\ &= \tfrac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y}) + \tfrac{1}{4}(e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}) \\ &= \tfrac{1}{2}(e^{x+y} + e^{-(x+y)}) = \cosh(x+y)\,;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sinh(x)\, \cosh(y) + \cosh(x)\, \sinh(y) &= \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})\, \tfrac{1}{2}(e^y + e^{-y}) + \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})\, \tfrac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \\ &= \tfrac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}) + \tfrac{1}{4}(e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}) \\ &= \tfrac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-(x+y)}) = \sinh(x+y)\,.\end{aligned}$$

c) Beh.: Auf $[0, \infty)$ ist die Funktion cosh streng monoton wachsend. Für alle $0 \leqslant x < y$ gilt $e^x \geqslant 1$ und $e^y > 1$ und somit $\frac{1}{e^x e^y} < 1$. Außerdem ist $e^y - e^x > 0$. Daraus ergibt sich dann $\frac{e^y - e^x}{e^x e^y} < e^y - e^x$ bzw. $e^{-x} - e^{-y} < e^y - e^x$ bzw. $e^x + e^{-x} < e^y + e^{-y}$, d.h. $\cosh(x) < \cosh(y)$.

Beh.: Auf $(-\infty, 0]$ ist die Funktion cosh streng monoton fallend. Dies folgt aus **b) i)** zusammen mit dem eben Gezeigten. Für alle $x < y \leqslant 0$ gilt nämlich

$$\cosh(x) - \cosh(y) \overset{\textbf{b)i)}}{=} \cosh(-x) - \cosh(-y) \overset{0 \leqslant -y < -x}{>} 0\,.$$

Beh: Die Funktion sinh ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Dies ergibt sich aus der Monotonie von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$. Ist nämlich $x < y$, so haben wir $e^x < e^y$ und $e^{-y} < e^{-x}$ wegen $-y < -x$. Daraus folgt $e^x + e^{-y} < e^y + e^{-x}$ bzw. $e^x - e^{-x} < e^y - e^{-y}$, also $\sinh(x) < \sinh(y)$.

Wegen $e^x \to \infty$ $(x \to \infty)$ und $e^{-x} \to 0$ $(x \to \infty)$ sind

$$\lim_{x\to\infty} \cosh(x) = \lim_{x\to\infty} \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \lim_{x\to\infty} \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \infty\,.$$

Wegen $e^x \to 0$ $(x \to -\infty)$ und $e^{-x} \to \infty$ $(x \to -\infty)$ sind

$$\lim_{x\to-\infty} \cosh(x) = \lim_{x\to-\infty} \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = \lim_{x\to-\infty} \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\infty\,.$$

d) Da $\cosh(0) = 1$ und cosh auf $[0,\infty)$ monoton wachsend ist, gilt $\cosh([0,\infty)) \subset [1,\infty)$. Aus $\cosh(0) = 1$, $\cosh(2n) > \frac{e^{2n}}{2} > \frac{2n}{2} = n$ und der Stetigkeit von cosh folgt nach dem Zwischenwertsatz $[1,n] \subset \cosh([0,\infty))$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Daher ist

$$[1,\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [1,n] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \cosh([0,\infty)) = \cosh([0,\infty))\,.$$

Insgesamt haben wir $\cosh([0,\infty)) = [1,\infty)$ gezeigt.

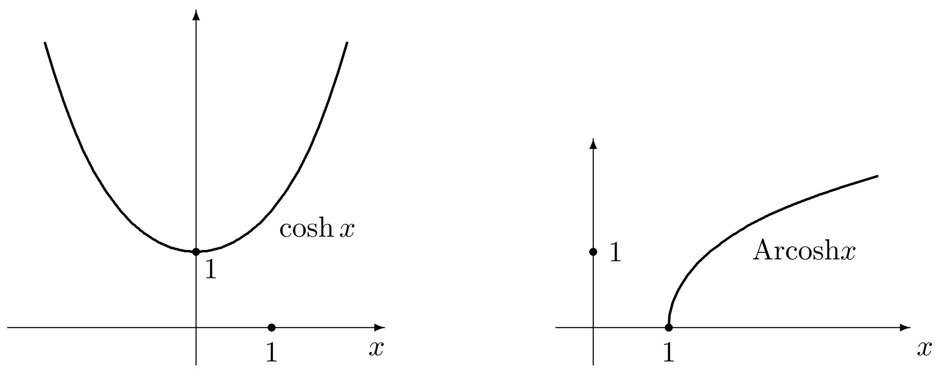
Da die Funktion cosh auf $[0,\infty)$ streng monoton ist, besitzt cosh auf $[0,\infty)$ eine Umkehrfunktion $\cosh([0,\infty)) \to [0,\infty)$. Zu deren Bestimmung lösen wir die Gleichung $y = \cosh(x)$, wobei $x \in [0,\infty)$ und $y \in \cosh([0,\infty)) = [1,\infty)$, nach x auf

$$\begin{aligned} y = \cosh(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \overset{|\cdot 2e^x}{\Leftrightarrow} \quad 2e^x y = e^{2x} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad (e^x)^2 - 2e^x y = -1 \\ &\Leftrightarrow \quad (e^x)^2 - 2e^x y + y^2 = -1 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad (e^x - y)^2 = y^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad |e^x - y| = \sqrt{y^2 - 1}\,. \end{aligned}$$

Wegen $e^x = \frac{1}{2}(e^x + e^x) \geqslant \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x) = y$ für $x \geqslant 0$ ist dies äquivalent zu

$$e^x - y = \sqrt{y^2 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad e^x = y + \sqrt{y^2 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\bigl(y + \sqrt{y^2 - 1}\bigr)\,.$$

Daher ist die Umkehrfunktion von $\cosh\colon [0,\infty) \to [1,\infty)$ gegeben durch $[1,\infty) \to [0,\infty)$, $y \mapsto \ln\bigl(y + \sqrt{y^2 - 1}\bigr)$. Diese nennt man *Areacosinus* und schreibt Arcosh.



Auch auf $(-\infty, 0]$ ist cosh streng monoton, so dass es eine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion $\cosh((-\infty,0]) \to (-\infty,0]$ gibt. Es ist $\cosh((-\infty,0]) = [1,\infty)$. Wie zuvor erhalten wir für $x \leqslant 0$ und $y \geqslant 1$ (Diesmal ist $e^x = \frac{1}{2}(e^x + e^x) \leqslant \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x) = y$)

$$\begin{aligned} y = \cosh(x) \quad &\Leftrightarrow \quad |e^x - y| = \sqrt{y^2 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad -(e^x - y) = \sqrt{y^2 - 1} \\ &\Leftrightarrow \quad e^x = y - \sqrt{y^2 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\bigl(y - \sqrt{y^2 - 1}\bigr)\,. \end{aligned}$$

Also hat $\cosh\colon (-\infty,0] \to [1,\infty)$ die Umkehrfunktion $[1,\infty) \to (-\infty,0]$, $y \mapsto \ln\bigl(y - \sqrt{y^2 - 1}\bigr)$.

Da $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist und $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (Dies kann man mit einem ähnlichen Argument wie bei cosh zeigen) gilt, existiert die Umkehrfunktion von $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche mit Arsinh (*Areasinus*) bezeichnet wird. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
y = \operatorname{Arsinh} x \quad &\iff \quad x = \sinh y \quad \iff \quad x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \iff \quad 2x = e^y - e^{-y} \\
&\overset{e^y \neq 0}{\iff} \quad 2xe^y = e^{2y} - 1 \quad \iff \quad e^{2y} - 2xe^y = 1 \\
&\iff \quad (e^y)^2 - 2xe^y + x^2 = x^2 + 1 \quad \iff \quad (e^y - x)^2 = x^2 + 1 \\
&\iff \quad |e^y - x| = \sqrt{x^2+1} \quad \iff \quad e^y = x + \sqrt{x^2+1} \ \text{ oder } \ e^y = \underbrace{x - \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{>|x| \geqslant x}}_{<x-x=0} \\
&\overset{e^y > 0}{\iff} \quad e^y = x + \sqrt{x^2+1} \quad \iff \quad y = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr).
\end{aligned}$$

Also ist $\operatorname{Arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr)$ die Umkehrfunktion von $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

e) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\cosh(x) &= \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \tfrac{1}{2}(e^{-i(ix)} + e^{i(ix)}) = \cos(ix)\,, \\
\sinh(x) &= \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = i\,\tfrac{1}{2i}(e^{-i(ix)} - e^{i(ix)}) = -i\sin(ix)\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Mit der Reihenentwicklung von $\sin x$ hat man für jedes $x \neq 0$

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{x - (x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots)}{x(x - \frac{1}{3!}x^3 + \ldots)} = \frac{\frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 + \ldots}{x^2 - \frac{1}{3!}x^4 + \ldots}\,,$$

und hieraus folgt wegen der Stetigkeit von Potenzreihen (vgl. Satz 3 in 11.3)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 + \ldots}{x^3 - \frac{1}{3!}x^5 + \ldots} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}x^2 + \ldots}{1 - \frac{1}{3!}x^2 + \ldots} = \frac{\frac{1}{3!}}{1} = \frac{1}{6}\,.$$

b) Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} &= \lim_{y\to 0} \frac{(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots) - 1}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots}{y} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{1 + \frac{y}{2!} + \frac{y^2}{3!} + \frac{y^3}{4!} + \ldots}{1} = 1
\end{aligned}$$

(Die letzte Gleichheit gilt aufgrund der Stetigkeit von Potenzreihen). Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{x\to a} e^a\,\frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = \lim_{y\to 0} e^a\,\frac{e^y - 1}{y} = e^a \cdot 1 = e^a.$$

c) Zunächst zeigen wir $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Hierzu betrachten wir die Reihenentwicklung des Sinus

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \ldots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + - \ldots \xrightarrow{x\to 0} 1.$$

[Dies folgt auch aus 3 1) in 9.3: Für alle $0 < |x| < 1$ gilt $|\frac{\sin x}{x} - 1| \leqslant 2|x|^2$. Wegen $2|x|^2 \to 0$ ergibt sich $|\frac{\sin x}{x} - 1| \to 0$ für $x \to 0$, d.h. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.] Aus $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ folgt insbesondere $\sin x \neq 0$ in der Nähe von $x_0 = 0$. Für jede Folge (x_n) mit $x_n \to 0$ und $x_n \neq 0$ hat man also $\sin x_n \to 0$ und $\sin x_n \neq 0$ für fast alle n. Daher folgt mit $\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$

$$\frac{e^{\sin x_n} - 1}{\sin x_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1\,, \qquad \text{also} \qquad \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \xrightarrow{x\to 0} 1.$$

Nach den Grenzwertsätzen existiert der zu untersuchende Grenzwert und es gilt

$$1 = \left(\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}.$$

d) Wir betrachten die Potenzreihen der vorkommenden Funktionen

$$\frac{\sinh x - \sin x}{x(\cosh x - 1)} = \frac{(x + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots) - (x - \frac{1}{3!}x^3 + - \cdots)}{x((1 + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots) - 1)} = \frac{\frac{2}{3!}x^3 + \cdots}{\frac{1}{2!}x^3 + \ldots} \xrightarrow{x\to 0} \frac{2 \cdot 2!}{3!} = \frac{2}{3}.$$

(Beim Grenzübergang kürzt man mit x^3 und verwendet die Stetigkeit von Potenzreihen.)

Aufgabe 4

a) Für $t \in (-1,1) \setminus \{0\}$ setze $y := \ln(1+t)$. Dann ist $t = e^y - 1$ und wegen $\lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1$ (vgl. Aufgabe **3 b)** mit $a = 0$) folgt

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y - 1} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{e^y-1}{y}} = \frac{1}{\lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y}} = 1.$$

b) Für $x = 0$ ist die Aussage klar, weil dann auf der linken und rechten Seite der Gleichung 1 steht. Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fest. Da $(\frac{x}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, liefert Teil **a)**

$$1 = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+x/n)}{x/n}.$$

Deshalb ergibt sich unter Verwendung der Stetigkeit des Logarithmus

$$1 = \lim_{n\to\infty} \tfrac{n}{x} \ln\big(1 + \tfrac{x}{n}\big) = \tfrac{1}{x} \lim_{n\to\infty} \Big(\ln\big(1 + \tfrac{x}{n}\big)^n\Big) = \tfrac{1}{x} \ln\Big(\lim_{n\to\infty} \big(1 + \tfrac{x}{n}\big)^n\Big)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \ln\Big(\lim_{n\to\infty} \big(1 + \tfrac{x}{n}\big)^n\Big) \quad \Leftrightarrow \quad e^x = \lim_{n\to\infty} \big(1 + \tfrac{x}{n}\big)^n.$$

Aufgabe 5

Vorbemerkung: Sei $a \in (0,\infty)$. Wir rechnen zuerst $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ nach. Für $a \neq 1$ ergibt sich

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{e^{x\ln a} - 1}{x} = \frac{e^{x\ln a} - 1}{x\ln a} \cdot \ln a \xrightarrow{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} \cdot \ln a \overset{(*)}{=} \ln a.$$

Die Gleichheit in $(*)$ haben wir in Aufgabe **3 b)** überprüft.
Für $a = 1$ gilt stets $a^x - 1 = 0$, also ist auch in diesem Falle der Grenzwert $0 = \ln a$.

Nun zur eigentlichen Aufgabe: Sei $a \in (0,\infty)$. Definitionsgemäß gilt

$$x_0 = a, \quad x_1 = a^{1/2}, \quad x_2 = (a^{1/2})^{1/2} = a^{1/4}, \quad x_3 = (a^{1/4})^{1/2} = a^{1/8}, \quad \ldots$$

Wir vermuten $x_n = a^{1/2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dies weisen wir mit vollständiger Induktion nach:
IA: $n = 0$. Nach Definition ist $x_0 = a$.
IS: Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Es gelte $x_n = a^{1/2^n}$ (IV). Dann folgt

$$x_{n+1} = x_n^{1/2} \overset{\text{IV}}{=} (a^{1/2^n})^{1/2} = a^{1/2^{n+1}}.$$

Damit erhalten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$y_n = 2^n(x_n - 1) = \frac{a^{1/2^n} - 1}{1/2^n}.$$

Wie in der Vorbemerkung gesehen, gilt $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$. Wegen $1/2^n \to 0$ $(n \to \infty)$ folgt $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{1/2^n}-1}{1/2^n} = \ln a$.

Aufgabe 6

a) Sei $x > 0$. Wir formen die gegebene Gleichung $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x}\,)^x$ äquivalent um

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x}\,)^x \quad \Leftrightarrow \quad (e^{\ln x})^{\sqrt{x}} = (e^{\ln\sqrt{x}})^x \quad \Leftrightarrow \quad e^{(\ln x)\sqrt{x}} = e^{(\frac{1}{2}\ln x)x} \quad \Leftrightarrow \quad e^{(\ln x)\sqrt{x}}\, e^{-(\frac{1}{2}\ln x)x} = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad e^{(\sqrt{x}-\frac{1}{2}x)\ln x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{x} - \tfrac{1}{2}x)\ln x = 0\,.$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $\ln x = 0$ (also $x = 1$) oder wenn $\sqrt{x} - \frac{1}{2}x = \sqrt{x}\,(1 - \frac{1}{2}\sqrt{x}\,) = 0$ gilt. Letzteres gilt genau für $\sqrt{x} = 2$, also $x = 4$. (Man beachte $x > 0$.) Somit gilt $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x}\,)^x$ genau für $x = 1$ oder $x = 4$.

b) **i)** Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}
2^{x-1} + 3^{x+1} = 2^{x+4} + 3^{x-1} \quad &\Longleftrightarrow \quad 2^{x-1} - 2^{x+4} = 3^{x-1} - 3^{x+1}\\
&\Longleftrightarrow \quad 2^x(\tfrac{1}{2} - 2^4) = 3^x(\tfrac{1}{3} - 3)\\
&\Longleftrightarrow \quad 2^x(-\tfrac{31}{2}) = 3^x(-\tfrac{8}{3})\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{2^x}{3^x} = \frac{8/3}{31/2} \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(\frac{2}{3}\Big)^x = \frac{16}{93}\\
&\Longleftrightarrow \quad x = \log_{\frac{2}{3}}\Big(\frac{16}{93}\Big) = \frac{\ln\frac{16}{93}}{\ln\frac{2}{3}} = \frac{\ln 16 - \ln 93}{\ln 2 - \ln 3}.
\end{aligned}$$

ii) Die Gleichung $x^{\log_{10} x} = 100\,x$ ist nur für $x \in (0, \infty)$ sinnvoll. Für $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
x^{\log_{10} x} = 100\,x \quad &\Longleftrightarrow \quad \log_{10}(x^{\log_{10} x}) = \log_{10}(100\,x)\\
&\Longleftrightarrow \quad (\log_{10} x)(\log_{10} x) = \log_{10}(100) + \log_{10}(x)\\
&\Longleftrightarrow \quad (\log_{10} x)^2 - \log_{10}(x) - 2 = 0\\
&\Longleftrightarrow \quad (\log_{10} x - 2)(\log_{10}(x) + 1) = 0\\
&\Longleftrightarrow \quad \log_{10} x = 2 \quad \text{oder} \quad \log_{10}(x) = -1\\
&\Longleftrightarrow \quad x = 100 \quad \text{oder} \quad x = 10^{-1} = \tfrac{1}{10}.
\end{aligned}$$

c) Die Identität $\log_2(\sqrt{7} - \sqrt{3}) = 2 - \log_2(\sqrt{7} + \sqrt{3})$ folgt sofort aus

$$\log_2(\sqrt{7} - \sqrt{3}) + \log_2(\sqrt{7} + \sqrt{3}) = \log_2\big((\sqrt{7} - \sqrt{3})\cdot(\sqrt{7} + \sqrt{3})\big) = \log_2(7 - 3) = \log_2(4) = 2.$$

Aufgabe 7

a) Die Reihe lässt sich als Differenz zweier Potenzreihen darstellen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!}\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1-2}{(n+1)!}\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!}\, z^n\,.$$

Die erste Reihe ergibt $\exp(z)$, die zweite liefert für $z = 0$ den Wert 2 und für $z \neq 0$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!}\, z^n = \frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\, z^{n+1} = \frac{2}{z}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \frac{2}{z}\big(\exp(z) - 1\big)\,.$$

Insgesamt folgt: Die von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!}\, z^n$ dargestellte Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$f(0) = \exp(0) - 2 = -1\,, \qquad f(z) = \exp(z) - \frac{2\exp(z) - 2}{z} = \frac{(z-2)\exp(z) + 2}{z} \quad (z \neq 0)\,.$$

b) Hier ergibt sich gemäß der Reihendarstellung der Sinus-Funktion für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+2} = (z+1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+1} = (z+1)\sin(z+1)\,.$$

Aufgabe 8

a) Für $a_n := (2n+1)/(n-1)^2$ gilt

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2n+1}{(n-1)^2} \cdot \frac{n^2}{2n+3} = \frac{2+1/n}{(1-1/n)^2} \cdot \frac{1}{2+3/n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{2} = 1\,.$$

Die Potenzreihe hat daher den Konvergenzradius 1. Also liegt für $|x-5| < 1$, d.h. $4 < x < 6$, Konvergenz und für $|x-5| > 1$, d.h. $x < 4$ oder $6 < x$, Divergenz der Reihe vor. Wir müssen nun noch die Ränder des Konvergenzintervalls $|x-5| = 1$, also $x = 4$ und $x = 6$, untersuchen. Dies liefert die zwei Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}(-1)^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}\,.$$

Die Konvergenz der ersten Reihe wird durch das Leibnizkriterium garantiert, denn

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2} \geqslant \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{2n+3}{n^2} = a_{n+1}\,.$$

Die zweite Reihe hingegen divergiert wegen $a_n \geqslant 2n/n^2 = 2/n$ und des Minorantenkriteriums. Insgesamt: Die Potenzreihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}(x-5)^n$ konvergiert genau für $x \in [4, 6)$.

b) Wegen $\sqrt[n]{|1/n^n|} = 1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ hat diese Potenzreihe den Konvergenzradius ∞, d. h. sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

c) Wir schreiben $y = (z+1)^2$ und untersuchen die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{2^n} y^n$. Wegen

$$\frac{\frac{3^{n^2}}{2^n}}{\frac{3^{(n+1)^2}}{2^{n+1}}} = \frac{3^{n^2}}{2^n} \cdot \frac{2^{n+1}}{3^{n^2+2n+1}} = \frac{2}{3^{2n+1}} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

hat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{2^n} y^n$ den Konvergenzradius 0, so dass diese Potenzreihe nur für $y = 0$ konvergiert. Damit ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{2^n} (z+1)^{2n}$ nur für $z = -1$ konvergent.

d) Für $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ gilt offenbar $1 \leqslant a_n \leqslant n$. Wegen $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ folgt hieraus $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ hat also den Konvergenzradius $R = 1^{-1} = 1$. Für $|z| = 1$ konvergiert die Reihe nicht, denn dann gilt $|a_n z^n| = a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, d. h. die Reihenglieder konvergieren nicht gegen 0. Konvergenz der Reihe liegt also nur für $|z| < 1$ vor.

e) Wir verwenden das Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(-8)^n}{\sqrt{n}}\, x^{3n+1}\right|} = \frac{8}{(\sqrt[n]{n})^{1/2}}\,|x^3|\,\sqrt[n]{|x|} \xrightarrow{n\to\infty} 8|x|^3\,.$$

Deshalb ist die gegebene Potenzreihe für $8|x|^3 < 1$, d.h. $|x| < \frac{1}{2}$, konvergent und für $8|x|^3 > 1$, d.h. $|x| > \frac{1}{2}$, divergent. Untersuchung der Randpunkte: Im Fall $x = \frac{1}{2}$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-8)^n}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{8}\right)^n \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\,.$$

Da $(1/\sqrt{n})$ eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die Reihe nach dem Leibnizkriterium. Im Fall $x = -\frac{1}{2}$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-8)^n}{\sqrt{n}} \left(-\frac{1}{8}\right)^n \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Hier liegt keine Konvergenz vor (die harmonische Reihe ist eine divergente Minorante). Also konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-8)^n}{\sqrt{n}} x^{3n+1}$ genau für $-\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{1}{2}$.

f) Diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius 1, denn

$$\sqrt[k]{|2^k z^{k^2}|} = \sqrt[k]{2^k} \cdot \sqrt[k]{|z|^{k^2}} = 2|z|^k \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} 0, & |z| < 1, \\ \infty, & |z| > 1. \end{cases}$$

Auf dem Rand des Konvergenzkreises liegt keine Konvergenz vor, denn für $|z| = 1$ gilt $|2^k z^{k^2}| = 2^k \nrightarrow 0$ $(k \to \infty)$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{k^2}$ konvergiert somit nur für $|z| < 1$.

Aufgabe 9

a) Wir kennen die Potenzreihen für $\sin z$ und $\cos z$ um die Entwicklungsstelle 0. In Verbindung mit dem Additionstheorem für $\sin z$ ergibt sich für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin(1 + z - 1) = \sin(1)\cos(z-1) + \cos(1)\sin(z-1) \\ &= \sin(1)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(z-1)^{2k} + \cos(1)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z-1)^{2k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n \end{aligned}$$

mit

$$a_n = \begin{cases} \sin(1)\,\frac{(-1)^{n/2}}{n!}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \cos(1)\,\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n!}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist offensichtlich ∞.

b) Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ erhalten wir unter Verwendung der Identität $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$

$$f(z) = \frac{2/3}{3 + (z-2)} + \frac{1/3}{-3 - 2(z-2)} = \frac{2/9}{1 + (z-2)/3} + \frac{-1/9}{1 + 2(z-2)/3}.$$

Für $\frac{1}{3}|z-2| < 1$ gilt

$$\frac{1}{1 + (z-2)/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-2}{3}\right)^n$$

und für $\frac{2}{3}|z-2| < 1$ ist

$$\frac{1}{1 + 2(z-2)/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2(z-2)}{3}\right)^n.$$

Hiermit folgt für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-2| < \frac{3}{2}$

$$f(z) = \frac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-2}{3}\right)^n - \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2(z-2)}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$$

mit $a_n = \frac{2}{9}(-\frac{1}{3})^n - \frac{1}{9}(-\frac{2}{3})^n = (-\frac{1}{3})^{n+2}(2 - 2^n)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{3}$ (Beweis?) beträgt der Konvergenzradius der Potenzreihe $\frac{3}{2}$.

Bemerkung: Die Darstellung $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$ kann man auf die folgende Weise erhalten ($\rightarrow$ Partialbruchzerlegung): Wegen $1 - z - 2z^2 = (1+z)(1-2z)$ machen wir den Ansatz

$$\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z}$$

und müssen die Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ berechnen. Die rechte Seite dieser Gleichung liefert

$$\frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z} = \frac{a(1-2z) + b(1+z)}{(1+z)(1-2z)} = \frac{a + b + (-2a+b)z}{1 - z - 2z^2}.$$

Die Darstellung gelingt also, wenn $a + b = 1$ und $-2a + b = -1$ sind. Dies bedeutet $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{1}{3}$.

Aufgabe 10 (P)

a) Da $\liminf a_n$ ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, gibt es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \liminf a_n =: a$. Da $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(b_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ von $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, d.h. es existiert $b \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{l\to\infty} b_{n_{k_l}} = b$. Damit folgt

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leqslant \lim_{l\to\infty}(a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) = a + b \leqslant a + \limsup_{n\to\infty} b_n = \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n\,.$$

Die zweite Ungleichung beweist man analog: Da $\limsup b_n$ ein Häufungspunkt von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, gibt es eine Teilfolge $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} b_{n_k} = \limsup b_n =: b$. Da $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(a_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ von $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, d.h. es existiert $a \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{l\to\infty} a_{n_{k_l}} = a$. Damit folgt

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geqslant \lim_{l\to\infty}(a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) = a + b \geqslant \liminf_{n\to\infty} a_n + b = \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n\,.$$

b) Sei $(a_{n_k} b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} b_{n_k} = \limsup_{n\to\infty}(a_n b_n)$. Da $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(a_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ von $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, d.h. es existiert $a \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{l\to\infty} a_{n_{k_l}} = a$. Da die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, konvergiert auch jede Teilfolge von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\lim_{n\to\infty} b_n$; insbesondere ist $\lim_{l\to\infty} b_{n_{k_l}} = \lim_{n\to\infty} b_n$. Es folgt

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{l\to\infty}(a_{n_{k_l}} b_{n_{k_l}}) = a \cdot \lim_{l\to\infty} b_{n_{k_l}} = a \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

Bei der letzten Ungleichung verwendeten wir $\lim_{n\to\infty} b_n \geqslant 0$. Sei nun $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = \limsup_{n\to\infty} a_n$. Dann ergibt sich

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{j\to\infty} a_{n_j} \cdot \lim_{j\to\infty} b_{n_j} = \lim_{j\to\infty}(a_{n_j} b_{n_j}) \leqslant \limsup_{n\to\infty}(a_n b_n)\,,$$

weil $(a_{n_j} b_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ als konvergente Teilfolge von $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Häufungspunkt von $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n)$ der größte Häufungspunkt von $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.