Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2009/10
07.01.2010

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

10. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die Funktion $f\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$, $x \mapsto \sin(x)$ besitzt die Umkehrfunktion $f^{-1} = \text{Arcsin}$ (*Hauptzweig des Arcussinus*). Drücken Sie die Umkehrfunktionen g^{-1} und h^{-1} folgender Funktionen durch f^{-1} aus und skizzieren Sie die Schaubilder.

$$g\colon \left[\tfrac{3}{2}\,\pi, \tfrac{5}{2}\,\pi\right] \to [-1,1],\ x \mapsto \sin(x)\,, \qquad h\colon \left[-\tfrac{3}{2}\,\pi, -\tfrac{1}{2}\,\pi\right] \to [-1,1],\ x \mapsto \sin(x)\,.$$

Aufgabe 2

Die Funktionen *Cosinus hyperbolicus* und *Sinus hyperbolicus* sind definiert durch

$$\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})\,, \qquad \sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})\,.$$

a) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von cosh und sinh um 0.

b) Weisen Sie für alle $x, y \in \mathbb{R}$ nach:

i) $\cosh(-x) = \cosh(x)\,;\quad \sinh(-x) = -\sinh(x)\,;$ **ii)** $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1\,;$

iii) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\,\cosh(y) + \sinh(x)\,\sinh(y)\,;$
$\sinh(x+y) = \sinh(x)\,\cosh(y) + \cosh(x)\,\sinh(y)\,.$

c) Untersuchen Sie cosh und sinh auf Monotonie und asymptotisches Verhalten.

d) Finden Sie für die Umkehrfunktionen von cosh und sinh explizite Darstellungen auf den jeweiligen Definitionsbereichen.

e) Drücken Sie cosh und sinh durch cos und sin aus.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x-a}$ $(a \in \mathbb{R})$ **c)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$ **d)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x(\cosh x - 1)}$

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie: $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1.$

b) Folgern Sie hieraus $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5

Es sei $a \in (0, \infty)$. Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien definiert durch

$$x_0 := a\,, \qquad x_n := \sqrt{x_{n-1}}\,, \qquad y_n := 2^n(x_n - 1) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}\,.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert $\ln a$.

Aufgabe 6

a) Berechnen Sie alle $x \in (0, \infty)$, die $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x}\,)^x$ erfüllen.

b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt

i) $2^{x-1} + 3^{x+1} = 2^{x+4} + 3^{x-1}$; **ii)** $x^{\log_{10} x} = 100\,x$.

c) Beweisen Sie:

$$\log_2\big(\sqrt{7} - \sqrt{3}\,\big) = 2 - \log_2\big(\sqrt{7} + \sqrt{3}\,\big).$$

Aufgabe 7

Welche Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ werden durch die folgenden Potenzreihen dargestellt?

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!}\, z^n$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,(z+1)^{2n+2}$

Aufgabe 8

Für welche $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}\,(x-5)^n$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}\,(z-2i)^n$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{2^n}\,(z+1)^{2n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) z^n$ **e)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-8)^n}{\sqrt{n}}\,x^{3n+1}$ **f)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{k^2}$

Aufgabe 9

Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihenentwicklung der Funktion f um die angegebene Entwicklungsstelle z_0. Wie groß ist der Konvergenzradius?

a) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sin z\,,\quad z_0 = 1$ **b)** $f\colon \mathbb{C}\setminus\{-1, \frac{1}{2}\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1-z}{1-z-2z^2}\,,\quad z_0 = 2$

Hinweis: Benutzen Sie in **a)** das Additionstheorem für Sinus. In **b)** hilft $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ weiter.

Aufgabe 10 (P)

Zeigen Sie:

a) Für beschränkte reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \leqslant \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n)\,.$$

b) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Folge mit $\lim_{n\to\infty} b_n \geqslant 0$, dann gilt:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

Klausur zur HM I: Dienstag, 02.03.2010, 08:00 - 10:00 Uhr
Anmeldeschluss: Freitag, 12.02.2010 (Vorlesungsende WS 09/10)
Informationen zur Prüfungsanmeldung entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage
www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm1etechphys2009w/.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **2, 7, 8 und 9**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.