Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2009/10
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) **i)** Wir suchen Zahlen a_n mit

$$\tanh x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad \text{also} \qquad \sinh x = \cosh x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Setzen wir die Potenzreihendarstellungen von $\sinh x$ und $\cosh x$ ein, so bedeutet dies

$$x + \tfrac{1}{3!}x^3 + \cdots = \bigl(1 + \tfrac{1}{2!}x^2 + \cdots\bigr)\bigl(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\bigr) .$$

Wir multiplizieren auf der rechten Seite aus; dann haben wir die Gleichung

$$x + \tfrac{1}{3!}x^3 + \cdots = a_0 + a_1 x + (a_2 + \tfrac{1}{2!}a_0)x^2 + (a_3 + \tfrac{1}{2!}a_1)x^3 + \cdots .$$

Somit liefert der Identitätssatz für Potenzreihen

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 + \tfrac{1}{2!}a_0 = 0, \quad a_3 + \tfrac{1}{2!}a_1 = \tfrac{1}{3!} ,$$

also $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ und $a_3 = -\frac{1}{3}$.

ii) Wir müssen die Gleichung $e^x = (\cos x)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)$, also

$$1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \cdots = \bigl(1 - \tfrac{1}{2!}x^2 + - \cdots\bigr)\bigl(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\bigr)$$

betrachten. Die rechte Seite ergibt

$$a_0 + a_1 x + (a_2 - \tfrac{1}{2!}a_0)x^2 + (a_3 - \tfrac{1}{2!}a_1)x^3 + \cdots$$

und der Vergleich mit der linken Seite liefert $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 - \frac{1}{2!}a_0 = \frac{1}{2!}$ sowie $a_3 - \frac{1}{2!}a_1 = \frac{1}{3!}$, also $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ und $a_3 = \frac{2}{3}$.

b) Wir suchen Zahlen a_n mit

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad \text{also} \qquad 1 = (x^2 + 2x - 3) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n .$$

Nun gilt wegen $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$

$$\begin{aligned}(x^2 + 2x - 3) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+2} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \\ &= -4a_0 - 4a_1(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} - 4a_n)(x+1)^n .\end{aligned}$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen hat diese Potenzreihe den Wert 1 genau dann, wenn die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$-4a_0 = 1, \qquad -4a_1 = 0, \qquad a_{n-2} - 4a_n = 0 \quad \text{für alle } n \geqslant 2 .$$

Es folgt: $a_0 = -\frac{1}{4}$, $a_1 = 0$ und $a_n = \frac{1}{4}a_{n-2}$ für jedes $n \geqslant 2$. Vollständige Induktion liefert: $a_{2k+1} = 0$ und $a_{2k} = -(\frac{1}{4})^{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Bemerkung für Studierende der Physik: Wegen $\sqrt[2k]{|a_{2k}|} = (\frac{1}{4})^{(1+1/k)/2} \xrightarrow{k\to\infty} (\frac{1}{4})^{1/2} = \frac{1}{2}$ und $\sqrt[2k+1]{|a_{2k+1}|} = 0$ ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1} = (\frac{1}{2})^{-1} = 2$.

Aufgabe 2

Sei $p \in \mathbb{N}$. Definiere $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^p$. Dann ist f auf $[a,b]$ stetig und somit über $[a,b]$ integrierbar. Schreibe $q_n := (b/a)^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Gemäß Satz 3 in 13.1 gilt

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} a(q_n-1)\sum_{k=1}^n f(aq_n^{k-1})q_n^{k-1} = \lim_{n\to\infty} a(q_n-1)\sum_{k=1}^n (aq_n^{k-1})^p q_n^{k-1} \\
&= \lim_{n\to\infty} a^{p+1}(q_n-1)\sum_{k=1}^n q_n^{(k-1)(p+1)} = a^{p+1}\lim_{n\to\infty}(q_n-1)\sum_{k=1}^n (q_n^{p+1})^{k-1} \\
&= a^{p+1}\lim_{n\to\infty}(q_n-1)\sum_{l=0}^{n-1}(q_n^{p+1})^l \overset{(*)}{=} a^{p+1}\lim_{n\to\infty}(q_n-1)\,\frac{1-(q_n^{p+1})^n}{1-q_n^{p+1}} \\
&= a^{p+1}\lim_{n\to\infty}\bigl(1-(q_n^{p+1})^n\bigr)\frac{q_n-1}{1-q_n^{p+1}} = a^{p+1}\lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+1}{n}}\right)^n\right)\frac{q_n-1}{1-q_n^{p+1}} \\
&\overset{(*)}{=} a^{p+1}\lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{p+1}\right)\frac{q_n-1}{(1-q_n)(1+q_n+q_n^2+\ldots+q_n^p)} \\
&= \bigl(b^{p+1}-a^{p+1}\bigr)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\underbrace{q_n}_{\to 1}+\underbrace{q_n^2}_{\to 1^2}+\ldots+\underbrace{q_n^p}_{\to 1^p}} = \frac{1}{p+1}\bigl(b^{p+1}-a^{p+1}\bigr)\,.
\end{aligned}$$

In $(*)$ verwendeten wir die geometrische Summenformel.

Aufgabe 3

a) Das Additionstheorem $\cos(z+y) = \cos z\,\cos y - \sin z\,\sin y$ $(z,y\in\mathbb{C})$ liefert für jedes $x\in\mathbb{R}$

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x\,\cos x - \sin x\,\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x\,,$$

woraus wegen $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1\,, \qquad \text{also} \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}\bigl(\cos(2x)+1\bigr)$$

folgt.

b) Sei $a > 0$. Wir zerlegen das Intervall $[0,a]$ äquidistant:

$$Z_n := \bigl\{x_k := \tfrac{ka}{n} \mid k = 0,1,\ldots,n\bigr\}\,, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Dann gilt für die Feinheit der Zerlegung Z_n

$$\|Z_n\| = \max\{x_k - x_{k-1} \mid k = 1,2,\ldots,n\} = \max\{\tfrac{ka}{n} - \tfrac{(k-1)a}{n} \mid k = 1,2,\ldots,n\} = \tfrac{a}{n}\,.$$

Ist $\xi_k = x_k$ gesetzt, dann liegt ξ_k in dem Intervall $[x_{k-1},x_k]$ für jedes $k = 1,2,\ldots,n$. Somit ist eine Riemannsche Zwischensumme der Funktion $f\colon [0,a]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ bzgl. der Zerlegung Z_n und den Zwischenstellen $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
\sigma(f,Z_n) &= \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})f(\xi_k) = \sum_{k=1}^n \tfrac{a}{n}\,\sin(\tfrac{ka}{n}) = \tfrac{a}{n}\sum_{k=1}^n \sin(k\,\tfrac{a}{n}) \\
&\overset{(*)}{=} \frac{a}{n}\,\frac{\sin(\frac{n}{2}\,\frac{a}{n})\,\sin(\frac{n+1}{2}\,\frac{a}{n})}{\sin(\frac{1}{2}\,\frac{a}{n})} = 2\sin(\tfrac{a}{2})\,\sin(\tfrac{n+1}{n}\,\tfrac{a}{2})\,\frac{\frac{1}{2}\,\frac{a}{n}}{\sin(\frac{1}{2}\,\frac{a}{n})}\,.
\end{aligned}$$

In $(*)$ benutzten wir Aufgabe 4 b) vom 8. Übungsblatt. Dafür müssen wir aber sicherstellen, dass $\frac{a}{n} \neq 2k\pi$ für alle $k\in\mathbb{Z}$ gilt. Wegen $\frac{a}{n}\to 0$ $(n\to\infty)$ ist $0 \neq \frac{a}{n} < 2\pi$ für hinreichend große $n\in\mathbb{N}$ erfüllt. Somit können wir obige Rechnung für hinreichend große n durchführen.

Da sin stetig ist, gilt $\sin(\frac{n+1}{n}\frac{a}{2}) \to \sin(\frac{a}{2})$ für $n \to \infty$. Außerdem folgt aus $\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\frac{a}{n}}{\sin(\frac{1}{2}\frac{a}{n})} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = 1\,.$$

f ist als stetige Funktion über $[0,a]$ integrierbar. Da für die Feinheit $\|Z_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$ gilt, erhalten wir nach Bemerkung 2) in 13.1

$$\begin{aligned}\int_0^a \sin x\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sigma(f,Z_n) = 2\sin(\tfrac{a}{2})\cdot\sin(\tfrac{a}{2})\cdot 1 = 2\sin^2(\tfrac{a}{2})\\ &= 2\big(1-\cos^2(\tfrac{a}{2})\big) \overset{\textbf{a)}}{=} 2\big(1-\tfrac{1}{2}(\cos(a)+1)\big) = 1-\cos(a)\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Sei $f\colon [a,b] \to [0,\infty)$ stetig und es existiere ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) > 0$.

Sei $\varepsilon := \frac{1}{2}f(x_0)$. Nach Voraussetzung ist $\varepsilon > 0$ und aufgrund der Stetigkeit von f in x_0 existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a,b]$ mit $|x-x_0| < \delta$. Für solche x gilt nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$f(x) = f(x_0) - (-f(x)+f(x_0)) \geqslant f(x_0) - |f(x)-f(x_0)| \geqslant 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon\,.$$

Setzt man $\alpha := \max\{a, x_0-\delta\}$ und $\beta := \min\{b, x_0+\delta\}$, so gilt $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$ und $f(x) \geqslant \varepsilon$ für alle $x \in [\alpha,\beta]$. Zusammen mit der Abschätzung $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [a,b]$ folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx\\ &\geqslant \int_a^\alpha 0\,dx + \int_\alpha^\beta \varepsilon\,dx + \int_\beta^b 0\,dx = (\beta-\alpha)\varepsilon > 0\,.\end{aligned}$$

b) Seien $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) \geqslant g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ und $f(x_0) > g(x_0)$ für ein $x_0 \in [a,b]$.

Betrachte die Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto h(x) := f(x) - g(x)$. Dann ist h als Komposition stetiger Funktionen stetig, und es gilt $h(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [a,b]$. Außerdem ist $h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) > 0$. Somit sind die Voraussetzungen des **a)**-Teils für die Funktion h erfüllt. Dieser liefert

$$\int_a^b h(x)\,dx > 0\,,$$

woraus aufgrund der Linearität des Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$$

folgt.

Aufgabe 5

a) Es sei $f \in C^0([a,b])$ mit $\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$.

Annahme: Es existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \neq 0$.

Betrachte die Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto h(x) := |f(x)|$. Dann ist h als Komposition stetiger Funktionen stetig und es gilt $h(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [a,b]$ sowie $h(x_0) = |f(x_0)| > 0$. Daher liefert Aufgabe **4 a)**

$$0 < \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$. Demnach ist die Annahme falsch und es gibt kein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \neq 0$, d.h. für alle $x \in [a,b]$ gilt $f(x) = 0$.

b) Nun sei $f \in C^0([a,b])$ und für alle $g \in C^0([a,b])$ gelte $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$.

Speziell für $f = g$ gilt $\int_a^b (f(x))^2\,dx = 0$. Da die Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto h(x) := (f(x))^2$ stetig ist und $\int_a^b |h(x)|\,dx = 0$ gilt, liefert Teil **a)**: $0 = h(x) = (f(x))^2$ für alle $x \in [a,b]$, also $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.

Aufgabe 6

a) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Da $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x^2)$ als Komposition stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}$ stetig ist, gibt es zu jedem $h > 0$ nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\xi_h \in [a-h, a+h]$ mit

$$\int_{a-h}^{a+h} \cos(x^2)\,dx = \int_{a-h}^{a+h} 1\,dx\ \cos(\xi_h^2) = \big((a+h)-(a-h)\big)\cos(\xi_h^2) = 2h\cos(\xi_h^2)\,.$$

Also ist $\frac{1}{h}\int_{a-h}^{a+h}\cos(x^2)\,dx = 2\cos(\xi_h^2)$ für jedes $h > 0$. Für $h \to 0+$ konvergiert ξ_h gegen a und wegen der Stetigkeit von f konvergiert damit auch $\cos(\xi_h^2)$ gegen $\cos(a^2)$. Zusammen folgt

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int_{a-h}^{a+h} \cos(x^2)\,dx = 2\cos(a^2)\,.$$

b) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest. Für jedes $h > \max\{0, -a\}$ (Man muss $h > -a$ fordern, damit $\ln\colon [a+h, a+2h] \to \mathbb{R}$ überhaupt definiert ist.) existiert nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\xi_h \in [a+h, a+2h]$ mit

$$\int_{a+h}^{a+2h} \ln x\ dx = ((a+2h)-(a+h))\ln\xi_h = h\ln\xi_h\,.$$

Demzufolge ist $\frac{1}{h}\int_{a+h}^{a+2h}\ln x\ dx = \ln\xi_h$. Mit $h \to \infty$ geht ξ_h gegen ∞ und damit strebt auch $\ln\xi_h$ gegen ∞. Also konvergiert der Ausdruck $\frac{1}{h}\int_{a+h}^{a+2h}\ln x\ dx$ für $h \to \infty$ nicht.

c) Wir zeigen, dass der Grenzwert 0 ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$.

Wir zerlegen das Intervall $[0,1]$ in zwei Teilintervalle so, dass der Betrag des Integrals über ein Teilintervall durch $\varepsilon/2$ abgeschätzt werden kann.

Das erste Intervall soll die Länge $\varepsilon/2$ haben. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $\xi \in [0, \varepsilon/2]$ mit

$$\Big|\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} h^x\cos x\ dx\Big| = \Big|\frac{\varepsilon}{2}\Big|\ |h^\xi|\ |\cos\xi| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für jedes } h \in (0,1)\,.$$

Für $\xi \in [\varepsilon/2, 1]$ gilt $\xi \geqslant \varepsilon/2$. Sei nun $h > 0$ so klein, dass $h^{\varepsilon/2} < \varepsilon/2$ ist. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung für ein $\xi \in [\varepsilon/2, 1]$

$$\Big|\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 h^x\cos x\ dx\Big| \leqslant \underbrace{(1-\varepsilon/2)}_{\leqslant 1}|h^\xi|\ |\cos\xi| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zusammen können wir abschätzen

$$\Big|\int_0^1 h^x\cos x\ dx\Big| = \Big|\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} h^x\cos x\ dx + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 h^x\cos x\ dx\Big| \leqslant \Big|\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} h^x\cos x\ dx\Big| + \Big|\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 h^x\cos x\ dx\Big| < \varepsilon.$$

Also ist $\lim\limits_{h\to 0+}\int_0^1 h^x\cos x\,dx = 0$.

Aufgabe 7 (P)

a) **i)** Die Funktion f ist als Komposition stetiger Funktionen auf $(0,1]$ stetig.
Allerdings ist f auf $(0,1]$ nicht gleichmäßig stetig. Beweis:
Sei $\varepsilon = 1$ und sei $\delta > 0$ beliebig. Wähle $m, n \in \mathbb{N}$ so, dass $m > n$ und $1/n < \delta$ gilt. Für $x = 1/n$ und $y = 1/m$ ergibt sich

$$|x - y| = 1/n - 1/m < \delta\,,$$

jedoch ist

$$|f(x) - f(y)| = |n - m| \geqslant 1 = \varepsilon\,.$$

Folglich ist f nicht gleichmäßig stetig auf $(0,1]$.

ii) Die Funktion f ist auf $[1,\infty)$ gleichmäßig stetig. Beweis:
Wir schätzen zunächst für beliebige $x, y \geqslant 1$ ab

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= \left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right| = \left|\frac{y^2 - x^2}{x^2y^2}\right| = \frac{|y-x| \cdot |x+y|}{x^2y^2} \leqslant |y-x|\,\frac{|x| + |y|}{x^2y^2} \\ &= |y-x|\,\frac{x+y}{x^2y^2} = |y-x|\left(\frac{1}{xy^2} + \frac{1}{x^2y}\right) \leqslant 2\,|y-x|\,.\end{aligned}$$

Nun sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta = \varepsilon/2$. Für alle $x, y \geqslant 1$ mit $|x - y| < \delta$ gilt nach obiger Ungleichung

$$|f(x) - f(y)| \leqslant 2\,|y - x| < 2\delta = \varepsilon.$$

Also ist f auf $[1,\infty)$ gleichmäßig stetig.

b) Sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion so, dass $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existiert.

Sei $\varepsilon > 0$. Um nachzuweisen, dass f auf $[0,\infty)$ gleichmäßig stetig ist, müssen wir ein $\delta > 0$ finden mit

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } x, y \in [0,\infty) \text{ mit } |x - y| < \delta\,.$$

Wegen der Existenz des Grenzwerts $\lim_{x\to\infty} f(x) =: \alpha$ gibt es eine Konstante $M > 0$ mit

$$|f(x) - \alpha| < \tfrac{\varepsilon}{4} \qquad \text{für alle } x \geqslant M\,.$$

Für alle $x, y \geqslant M$ gilt daher

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - \alpha + \alpha - f(y)| \leqslant |f(x) - \alpha| + |\alpha - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{4} + \tfrac{\varepsilon}{4} = \tfrac{\varepsilon}{2}\,. \tag{1}$$

Da f auf $[0,M]$ stetig ist, ist f auf $[0,M]$ gleichmäßig stetig (Satz 2, Ergänzungen, S. 32), d.h. es gibt ein $\delta > 0$ mit

$$\forall x, y \in [0,M]:\ |x - y| < \delta \quad\Rightarrow\quad |f(x) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{2}\,. \tag{2}$$

Seien $x, y \in [0,\infty)$ beliebig mit $|x - y| < \delta$. O.B.d.A. gelte $x \leqslant y$.

1. Fall: $x > M$.
Dann ist auch $y > M$ und es gilt nach (1)

$$|f(x) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

2. Fall: $x \in [0,M]$.

Fall 2.1: Für $y \in [0,M]$ gilt nach (2)

$$|f(x) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Fall 2.2: Für $y > M$ ergibt sich mit (2) und (1)

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(M) + f(M) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(M)| + |f(M) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Insgesamt haben wir gezeigt: Für alle $x, y \in [0,\infty)$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, d.h. f ist auf $[0,\infty)$ gleichmäßig stetig.