

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie**

11. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie jeweils die ersten vier Koeffizienten der Potenzreihe um $x_0 = 0$ für

i) $\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$; ii) $\frac{e^x}{\cos x}$.

b) Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) := x^2 + 2x - 3$. Bestimmen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = -1$ die Funktion $1/f$ darstellt.

Aufgabe 2

Sei $p \in \mathbb{N}$ und $0 < a < b$. Begründen Sie, dass die Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^p$ auf $[a, b]$ integrierbar ist, und bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int_a^b x^p dx.$$

Verwenden Sie dazu die Zerlegungen $Z_n = \{a (b/a)^{\frac{k}{n}} \mid k = 0, 1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Additionstheorems für Cosinus

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} (\cos(2x) + 1) \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

b) Sei $a > 0$. Berechnen Sie

$$\int_0^a \sin(x) dx,$$

indem Sie äquidistante Zerlegungen des Intervalls $[0, a]$ der Feinheit $\frac{a}{n}$ benutzen.

Hinweis: Aufgabe 4 b) vom 8. Übungsblatt.

Aufgabe 4

a) Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und $f(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in [a, b]$. Zeigen Sie:

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

b) Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$ und $f(x_0) > g(x_0)$ für ein $x_0 \in [a, b]$. Zeigen Sie:

$$\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx.$$

Aufgabe 5

- a) Sei $f \in C^0([a, b])$ mit $\int_a^b |f(x)| dx = 0$. Zeigen Sie, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.
- b) Wiederum sei $f \in C^0([a, b])$. Für alle $g \in C^0([a, b])$ gelte $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$. Zeigen Sie, dass dann $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

Aufgabe 6

Sei $a \in \mathbb{R}$ fest. Untersuchen Sie folgende Ausdrücke auf Konvergenz und berechnen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert:

- a) $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{a-h}^{a+h} \cos(x^2) dx$; b) $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \int_{a+h}^{a+2h} \ln x dx$; c) $\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^1 h^x \cos x dx$.

Aufgabe 7 (P)

- a) Untersuchen Sie jeweils die Funktion f auf gleichmäßige Stetigkeit:

i) $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$;

ii) $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2}$.

- b) Die Funktion $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und es existiere der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Zeigen Sie, dass dann f auf $[0, \infty)$ gleichmäßig stetig ist.

Übungsklausur Zur Teilnahme an der Übungsklausur am Samstag, den 30.01.2010, von 08:00 bis 10:00 Uhr ist keine Anmeldung erforderlich. Hörsaalverteilung der Übungsklausur:

Fachrichtung	Anfangsbuchstabe Nachname	Hörsaal
ETEC/Geodäsie	A-K	Benz-Hörsaal
ETEC/Geodäsie	L-Z	Daimler-Hörsaal
Physik/Chemie	A-Z	Gerthsen-Hörsaal

Weitere Informationen zur Übungsklausur finden Sie auf der Vorlesungshomepage.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **3, 4 und 5**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.

Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.