Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2009/10
21.01.2010

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

12. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie jeweils alle $x \in D$, in denen die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und berechnen Sie für diese x die Ableitung $f'(x)$.

a) $D = \mathbb{R}\,, \quad f(x) = |x|^3$

b) $D = (0, \infty)\,, \quad f(x) = x^{(x^x)}$

c) $D = (0, \infty)\,, \quad f(x) = (x^x)^x$

d) $D = (0, \infty)\,, \quad f(x) = x^{(2^x)} + x^{(x^2)} + 2^{(x^x)}$

e) $D = (0, 1)\,, \quad f(x) = (x^2 + 1)\, e^{x^5}$

f) $D = (-\frac{1}{2}, 1)\,, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 g(x)\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$

In Teil **f)** sei $g\colon (-\frac{1}{2}, 1) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare und beschränkte Funktion.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen.

a) $f\colon (1, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(\ln x)$

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(2x)\, e^{\sin x}$

c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cosh(x)$

d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \operatorname{Arsinh}(x)$

Aufgabe 3

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\!\left(e^{\frac{1}{|x|}} - \ln(x^4)\right) & \text{für } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{für } x = 0\,. \end{cases}$$

Geben Sie alle $x_0 \in \mathbb{R}$ an, in denen f differenzierbar ist, und bestimmen Sie $f'(x_0)$.

Aufgabe 4

Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und das Polynom $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Zeigen Sie, dass für alle $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt

$$p^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{n} a_k \frac{k!}{(k-m)!}\, x^{k-m} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Folgern Sie hieraus $a_m = \frac{1}{m!}\, p^{(m)}(0)$ für alle $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Aufgabe 5

Begründen Sie, dass die Cosinus-Funktion auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend ist und den Wertebereich $[-1, 1]$ besitzt. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$ in den Stellen, in denen arccos differenzierbar ist.

— bitte wenden —

Aufgabe 6

a) Berechnen Sie die Ableitung des *Tangens* $\tan\colon \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$.
Begründen Sie, dass tan auf $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ stetig und streng monoton wachsend ist sowie $\tan((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))=\mathbb{R}$ gilt. Die Umkehrfunktion $\arctan\colon\mathbb{R}\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ heißt *Arcustangens*. Zeigen Sie, dass arctan auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit

$$\arctan'(y)=\frac{1}{1+y^2}\qquad \text{für alle } y\in\mathbb{R}.$$

b) Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f\colon(0,\infty)\to\mathbb{R},\ x\mapsto \arctan(x)+\arctan(x^{-1})$$

konstant ist, und bestimmen Sie die Konstante.

Aufgabe 7

a) Begründen Sie, dass jede der folgenden Funktionen ihr Maximum und Minimum annimmt, und berechnen Sie diese:

i) $f\colon[-3,2]\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^4-4x^2+2\,;$

ii) $g\colon[0,10]\to\mathbb{R},\ x\mapsto -6x+(|x-3|+2)^2\,.$

b) Für eine physikalische Größe werden bei n Messungen die Messwerte $a_1,\ldots,a_n$ bestimmt. Als Messergebnis gibt man dann die Zahl a an, die durch

$$f(a)=\min\{\,f(x): x\in\mathbb{R}\,\}\quad\text{mit}\quad f(x):=\sum_{k=1}^{n}(x-a_k)^2$$

definiert wird (*Methode der kleinsten Quadrate*). Berechnen Sie a.

Aufgabe 8 (P)

Zeigen Sie die *Kettenregel:* Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f\colon I\to\mathbb{R}$ in $x_0\in I$ differenzierbar und $J\subset\mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $f(I)\subset J$. Sei $g\colon J\to\mathbb{R}$ in $y_0:=f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $g\circ f\colon I\to\mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)\,.$$

Übungsklausur Zur Teilnahme an der Übungsklausur am Samstag, den 30.01.2010, von 08:00 bis 10:00 Uhr, ist keine Anmeldung erforderlich. Hörsaalverteilung der Übungsklausur:

Fachrichtung	Anfangsbuchstabe Nachname	Hörsaal
ETEC/Geodäsie	A-K	Benz-Hörsaal
ETEC/Geodäsie	L-Z	Daimler-Hörsaal
Physik/Chemie	A-Z	Gerthsen-Hörsaal

Weitere Hinweise zur Übungsklausur finden Sie auf der Vorlesungshomepage.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **3, 4, 5 und 6**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.