

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
 Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie**
Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die Funktion $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ ist auf $(0, \infty)$ differenzierbar. Um das Monotonieverhalten von f zu untersuchen, betrachten wir f' . Für jedes $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \begin{cases} > 0 & \text{für } x < e, \\ < 0 & \text{für } x > e. \end{cases}$$

Somit ist f auf $\begin{cases} (0, e) \\ (e, \infty) \end{cases}$ streng monoton $\begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{cases}$. Für $x, y \in (0, \infty)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} x^y > y^x &\iff e^{y \cdot \ln(x)} > e^{x \cdot \ln(y)} \stackrel{\text{Exp.fkt. streng mon. wachsend}}{\iff} y \cdot \ln(x) > x \cdot \ln(y) \\ &\iff \frac{\ln(x)}{x} > \frac{\ln(y)}{y} \iff f(x) > f(y). \end{aligned}$$

Da $\pi > e$ und f auf (e, ∞) streng monoton fallend ist, folgt $f(\pi) < f(e)$. Deshalb liefert obige Äquivalenzkette $e^\pi > \pi^e$.

Aufgabe 2

- a) i) Seien $0 < y < x$. Definiere $f: [y, x] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t \ln t$. Dann ist f auf $[y, x]$ stetig und auf (y, x) differenzierbar mit $f'(t) = 1 \cdot \ln t + t \cdot \frac{1}{t} = 1 + \ln t$, $t \in (y, x)$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (y, x)$ mit

$$x \ln x - y \ln y = (x - y)f'(\xi) = (x - y)(1 + \ln \xi) \leq (x - y)(1 + \ln x),$$

weil $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist.

- ii) Seien $0 < y < x$. Betrachte die Funktion $f: [y^2, x^2] \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto e^u$. Da f auf $[y^2, x^2]$ stetig und auf (y^2, x^2) differenzierbar ist, erfüllt f die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Danach existiert ein $\xi \in (y^2, x^2)$ mit

$$e^{x^2} - e^{y^2} = f(x^2) - f(y^2) = (x^2 - y^2)f'(\xi) = \underbrace{(x - y)(x + y)}_{\geq 0} e^\xi \leq (x - y)(x + y)e^{x^2}$$

wegen der Monotonie der (reellen) Exponentialfunktion.

- b) Wir betrachten die Funktion $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto \cos \sqrt{y}$. Die Kettenregel liefert, dass f auf $(0, \infty)$ differenzierbar ist mit $f'(y) = \frac{-\sin \sqrt{y}}{2\sqrt{y}}$ für alle $y > 0$. Nach dem Mittelwertsatz existiert zu jedem $x > 1$ ein $\xi_x \in (x - 1, x + 1)$ mit

$$\frac{f(x + 1) - f(x - 1)}{(x + 1) - (x - 1)} = f'(\xi_x), \quad \text{d.h.} \quad \frac{\cos \sqrt{x + 1} - \cos \sqrt{x - 1}}{2} = \frac{-\sin \sqrt{\xi_x}}{2\sqrt{\xi_x}}.$$

Hieraus ergibt sich die Abschätzung

$$\left| \cos \sqrt{x + 1} - \cos \sqrt{x - 1} \right| = \left| \frac{\sin \sqrt{\xi_x}}{\sqrt{\xi_x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\xi_x}} \stackrel{\xi_x \in (x-1, x+1)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{x - 1}}.$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x - 1}} = 0$ ist der zu bestimmende Grenzwert 0.

Aufgabe 3

a) Hier kann man sofort eine Stammfunktion hinschreiben:

$$\int_0^1 (1+2x)^3 dx = \frac{1}{8}(1+2x)^4 \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{8}(3^4 - 1^4) = 10.$$

b) Wir zerlegen das Intervall:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 |x-1| dx &= \int_{-2}^1 |x-1| dx + \int_1^2 |x-1| dx = \int_{-2}^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx \\ &= \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_{-2}^1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) \Big|_1^2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - (-2 - 2) + (2 - 2) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = 5. \end{aligned}$$

c) Wegen $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x$ ist $\frac{1}{2} \sin^2 x$ eine Stammfunktion von $\sin x \cos x$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x \Big|_{x=0}^{\pi/2} = \frac{1}{2}(\sin^2(\frac{1}{2}\pi) - \sin^2(0)) = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}.$$

d) Auch hier kann man eine Stammfunktion leicht finden:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}} dx &= -\frac{1}{4} \int_0^1 \frac{-8x}{2\sqrt{9-4x^2}} dx \\ &= -\frac{1}{4} \sqrt{9-4x^2} \Big|_{x=0}^1 = -\frac{1}{4}(\sqrt{5} - \sqrt{9}) = \frac{1}{4}(3 - \sqrt{5}). \end{aligned}$$

e) Hier wenden wir die Substitutionsregel mit $g(t) = \sqrt{t}$ an. Wir ersetzen also \sqrt{t} durch x und $g'(t) dt = (2\sqrt{t})^{-1} dt$ durch dx . Dabei müssen wir auch die Integrationsgrenzen anpassen: $t = 1$ entspricht $x = g(1) = 1$ und $t = 4$ entspricht $x = g(4) = 2$.

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} dt &= \int_1^4 \frac{2}{1+\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \\ &= \int_1^2 \frac{2}{1+x} dx = 2 \ln|1+x| \Big|_{x=1}^2 = 2(\ln(3) - \ln(2)) = 2 \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

f) Um dieses Integral zu berechnen, verwenden wir partielle Integration für $f(x) = \ln x$ und $g'(x) = x$. Mit $f'(x) = x^{-1}$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ folgt

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln x dx &= \int_1^e f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_{x=1}^e - \int_1^e f'(x)g(x) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x \Big|_{x=1}^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 x^{-1} dx = \frac{1}{2}(e^2 \ln e - \ln 1) - \int_1^e \frac{1}{2}x dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{1}{4}x^2\right) \Big|_{x=1}^e = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2 - 1) = \frac{1}{4}(e^2 + 1). \end{aligned}$$

g) Sei $k \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten zunächst das Integral ohne Betrag:

$$\begin{aligned} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin x dx &= -\cos x \Big|_{x=(k-1)\pi}^{k\pi} = -\cos(k\pi) + \cos((k-1)\pi) \\ &= -(-1)^k + (-1)^{k-1} = -(-1) + 1(-1)^{k-1} = 2(-1)^{k-1}. \end{aligned}$$

Da die Sinusfunktion ihre Nullstellen genau in $k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ hat und stetig ist, ist \sin auf dem ganzen Intervall $[(k-1)\pi, k\pi]$ entweder ≥ 0 oder ≤ 0 . Folglich gilt

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx = \left| \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin x dx \right| = 2.$$

h) Die Substitution $e^{x^2} = t$, $dt = 2xe^{x^2} dx$ führt auf

$$\int_0^1 x e^{2x^2} \sin(e^{x^2}) dx = \frac{1}{2} \int_1^e t \sin t dt.$$

Mithilfe von partieller Integration ist

$$\frac{1}{2} \int_1^e t \sin t dt = -\frac{t}{2} \cos t \Big|_1^e + \frac{1}{2} \int_1^e \cos t dt = \left[\frac{-t \cos t + \sin t}{2} \right]_1^e = -\frac{e}{2} \cos e + \frac{\sin e}{2} + \frac{\cos 1 - \sin 1}{2}.$$

i) Wir substituieren zunächst $t = \sqrt{x}$, d.h. $x = t^2$. Dann ist $dx = 2t dt$ und aus $x : 1 \rightarrow 4$ ergibt sich $t : 1 \rightarrow 2$

$$\int_1^4 \arctan \sqrt{\sqrt{x} - 1} dx = \int_1^2 \arctan(\sqrt{t-1}) \cdot 2t dt;$$

nun substituieren wir $u = \sqrt{t-1}$, also $t = u^2 + 1$, $dt = 2u du$, $t : 1 \rightarrow 2$ wird zu $u : 0 \rightarrow 1$,

$$= \int_0^1 \arctan(u) \cdot 2(u^2 + 1) \cdot 2u du = \int_0^1 (4u^3 + 4u) \arctan(u) du.$$

(Natürlich hätten wir die beiden Substitutionen auch zu einer zusammenfassen können.) Dann führen wir eine partielle Integration aus mit $f(u) = \arctan(u)$ und $g'(u) = 4u^3 + 4u$:

$$\begin{aligned} &= (u^4 + 2u^2) \arctan(u) \Big|_{u=0}^1 - \int_0^1 (u^4 + 2u^2) \frac{1}{1+u^2} du \\ &= 3 \arctan(1) - \int_0^1 \frac{(u^2+1)^2 - 1}{1+u^2} du = \frac{3}{4}\pi - \int_0^1 (u^2+1) du + \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du \\ &= \frac{3}{4}\pi - \left(\frac{1}{3}u^3 + u\right) \Big|_{u=0}^1 + \arctan(u) \Big|_{u=0}^1 = \frac{3}{4}\pi - \frac{4}{3} + \frac{1}{4}\pi = \pi - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Hier substituieren wir $u = e^t$. Dies liefert $du = e^t dt$ und damit

$$\int^x \frac{e^t}{e^{2t} + 1} dt = \int^{e^x} \frac{1}{u^2 + 1} du = \arctan(u) + k \Big|_{u=e^x} = \arctan(e^x) + k,$$

wobei $k \in \mathbb{R}$ beliebig. Folglich ist jede der Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan(e^x) + k$, $k \in \mathbb{R}$, eine Stammfunktion von $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{e^t}{e^{2t}+1}$, und es gibt keine weiteren Stammfunktionen.

b) Die Substitution $u = 1 - t$ liefert $du = (-1) dt$, also

$$\begin{aligned} \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t}} dt &= \int^{1-x} \frac{1-u}{\sqrt{u}} (-1) du = \int^{1-x} (u^{1/2} - u^{-1/2}) du = \frac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2} + k \Big|_{u=1-x} \\ &= \frac{2}{3}(1-x)^{3/2} - 2(1-x)^{1/2} + k, \end{aligned}$$

wobei $k \in \mathbb{R}$ beliebig.

c) Wir verwenden partielle Integration mit $f(t) = \arcsin t$ und $g'(t) = 1$:

$$\begin{aligned} \int^x \arcsin t dt &= \int^x 1 \cdot \arcsin t dt = t \arcsin t \Big|_{t=x} - \int^x t \arcsin'(t) dt \\ &= x \arcsin x - \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = x \arcsin x + \sqrt{1-t^2} + k \Big|_{t=x} \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + k, \end{aligned}$$

wobei $k \in \mathbb{R}$ beliebig.

Aufgabe 5

- a) Wir betrachten die Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^x \sin(e^t) dt$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$.

Dann ist f nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf \mathbb{R} differenzierbar mit $f'(x) = \sin(e^x)$. Bekanntlich ist auch g auf \mathbb{R} differenzierbar mit $g'(x) = \cos x$. Wegen $F(x) = f(g(x)) - f(x)$ liefert die Kettenregel, dass F auf \mathbb{R} differenzierbar ist mit

$$F'(x) = f'(g(x)) g'(x) - f'(x) = \sin(e^{\sin x}) \cos(x) - \sin(e^x) \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

- b) Die Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^x (1+4t)e^{t^2} dt$ ist nach dem Hauptsatz auf \mathbb{R} differenzierbar. Daher ist f als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = (1+4x)e^{x^2} + e^{x^2} + xe^{x^2} 2x = (2+4x+2x^2)e^{x^2} = 2(1+x)^2 e^{x^2}.$$

Also gilt $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = -1$ ist. Wegen $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ wechselt f' in -1 das Vorzeichen nicht, so dass in -1 keine lokale Extremstelle von f vorliegt. Folglich besitzt f auf \mathbb{R} keine lokalen Extremstellen.

Aufgabe 6

Sei (x_0, y_0) der Schnittpunkt im ersten Quadranten der Geraden mit der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$.

Für $x, y \geq 0$ gilt $x^2 - y^2 = 1$ genau dann, wenn $y = \sqrt{x^2 - 1}$ ist.

Das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(x_0, 0)$ und (x_0, y_0) hat den Flächeninhalt

$$F_D := \frac{1}{2} x_0 y_0 = \frac{1}{2} x_0 \sqrt{x_0^2 - 1}.$$

Die gesuchte Fläche erhalten wir, indem wir hiervon die Fläche unter der Hyperbel

$$F_H := \int_1^{x_0} \sqrt{x^2 - 1} dx$$

subtrahieren. Partielle Integration führt auf

$$\begin{aligned} \int_1^{x_0} 1 \cdot \sqrt{x^2 - 1} dx &= \left(x \sqrt{x^2 - 1} \right) \Big|_{x=1}^{x_0} - \int_1^{x_0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \\ &= x_0 \sqrt{x_0^2 - 1} - \int_1^{x_0} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx - \int_1^{x_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx. \end{aligned}$$

Kürzen wir den Integranden im zweiten Summanden und addieren auf beiden Seiten $\int_1^{x_0} \sqrt{x^2 - 1} dx$, so bekommen wir

$$2 \int_1^{x_0} \sqrt{x^2 - 1} dx = x_0 \sqrt{x_0^2 - 1} - \int_1^{x_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

Wegen $\text{Arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ für $x > 1$ und $\text{Arcosh}(1) = 0$ folgt

$$\int_1^{x_0} \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} x_0 \sqrt{x_0^2 - 1} - \frac{1}{2} \left(\text{Arcosh}(x) \right) \Big|_{x=1}^{x_0} = \frac{1}{2} x_0 \sqrt{x_0^2 - 1} - \frac{1}{2} \text{Arcosh}(x_0).$$

Also beträgt der gesuchte Flächeninhalt

$$F_D - F_H = \frac{1}{2} x_0 \sqrt{x_0^2 - 1} - \left(\frac{1}{2} x_0 \sqrt{x_0^2 - 1} - \frac{1}{2} \text{Arcosh}(x_0) \right) = \frac{1}{2} \text{Arcosh}(x_0).$$

Aufgabe 7

Es gilt

$$a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 1.$$

Zur Berechnung von a_2 benutzen wir partielle Integration mit $f(x) = \sin x$ und $g'(x) = \sin x$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin x \, dx = [\sin x \cdot (-\cos x)]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot (-\cos x) \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2 \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - (\sin x)^2) \, dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 \, dx. \end{aligned}$$

Betrachtet man den ersten und den letzten Term in dieser Gleichungskette, so folgt

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 \, dx = \frac{\pi}{2}, \quad \text{also} \quad a_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 \, dx = \frac{\pi}{4}.$$

Nun sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2$. Partielle Integration führt auf

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-1} \cdot (\sin x) \, dx \\ &= [(\sin x)^{n-1} \cdot (-\cos x)]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x \cdot (-\cos x) \, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} (\cos x)^2 \, dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= (n-1) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, dx \right) = (n-1)(a_{n-2} - a_n), \end{aligned}$$

also

$$a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-2}.$$

Mit Hilfe dieser Rekursionsformel erhalten wir

$$a_3 = \frac{2}{3} a_1 = \frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{3}{4} a_2 = \frac{3\pi}{16}, \quad a_5 = \frac{4}{5} a_3 = \frac{8}{15}, \quad a_6 = \frac{5}{6} a_4 = \frac{5\pi}{32}.$$

Bemerkung: Ist n gerade, d.h. existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k$, so gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n-1}{n} a_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} a_{n-4} = \dots = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} a_0 \\ &= \frac{(2k-1) \cdot (2k-3) \cdot (2k-5) \cdot \dots \cdot 1}{2k \cdot 2(k-1) \cdot 2(k-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \frac{\pi}{2} = \frac{(2k)!}{2^{2k} \cdot (k!)^2} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ist n ungerade, d.h. existiert $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $n = 2k + 1$, so gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n-1}{n} a_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} a_{n-4} = \dots = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} a_1 \\ &= \frac{(n-1)^2 \cdot (n-3)^2 \cdot (n-5)^2 \cdot \dots \cdot 2^2}{n!} \cdot 1 \\ &= \frac{(2k)^2 \cdot (2(k-1))^2 \cdot (2(k-2))^2 \cdot \dots \cdot (2 \cdot 1)^2}{(2k+1)!} = \frac{2^{2k} \cdot (k!)^2}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Diese expliziten Darstellungen von a_n bestätigt man leicht mit Hilfe von vollständiger Induktion.

Aufgabe 8

- a) Zuerst schreiben wir das Integral als Summe zweier Integrale, verwenden dann im ersten Integral die Substitution $t := -x$, $dt = (-1) dx$ und schließlich $f(-t) = f(t)$ f.a. $t \in [-a, a]$

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_a^0 f(-t) (-1) dt + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^a f(-t) dt + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.\end{aligned}$$

- b) Ähnliches Vorgehen wie in a) ergibt

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_a^0 f(-t) (-1) dt + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^a f(-t) dt + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a -f(t) dt + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^a (-f(x) + f(x)) dx = 0.\end{aligned}$$

Aufgabe 9 (P)

Mit vollständiger Induktion zeigen wir folgende Aussage:

Für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt: $f^{(n)}$ existiert, und mit einem gewissen Polynom p_n ist

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt die Behauptung nach Definition von f mit $p_1(y) = 1$, $y \in \mathbb{R}$.

Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Für dieses n existiere $f^{(n)}$ und es gelte

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R})$$

für ein gewisses Polynom p_n (IV).

Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ liefert dann die Ketten- und Produktregel: $f^{(n)}$ ist differenzierbar mit

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) = \left(p_n\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) + p_n\left(\frac{1}{x}\right) \left(\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)' \\ &= -\frac{1}{x^2} p_n'\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) + p_n\left(\frac{1}{x}\right) \left(\frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = \left(-\frac{1}{x^2} p_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} p_n\left(\frac{1}{x}\right)\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).\end{aligned}$$

Mit $p_{n+1}(y) := -y^2 p_n'(y) + 2y^3 p_n(y)$ gilt also für $x \neq 0$ die behauptete Darstellung. (Man beachte, dass auch p_n' ein Polynom ist.) Es bleibt zu zeigen, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = 0, \quad \text{also} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0$$

gilt. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $y^k e^{-y} \rightarrow 0$ für $y \rightarrow \infty$ gilt ($k \in \mathbb{N}$ beliebig). Setzt man $y = |x|^{-1}$, so folgt $|x|^{-k} e^{-1/|x|} \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$. Für $|x| < 1$ ist $-1/x^2 < -1/|x|$, also ergibt sich auch $x^{-k} e^{-1/x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Der obige Grenzwert ist somit tatsächlich 0, d.h. $f^{(n+1)}(0) = (f^{(n)})'(0) = 0$.