Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2009/10
28.01.2010

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

13. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ und entscheiden Sie, welche der beiden Zahlen e^π, π^e die größere ist.

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes für alle $x > y > 0$:

i) $x \ln x - y \ln y \leqslant (x-y)(1+\ln x)$; **ii)** $e^{x^2} - e^{y^2} \leqslant (x-y)(x+y)\, e^{x^2}$.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \left(\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}\,\right).$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie folgende Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^1 (1+2x)^3\, dx$ **b)** $\displaystyle\int_{-2}^2 |x-1|\, dx$ **c)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\, \cos x\, dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}\, dx$ **e)** $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+\sqrt{t}\,)}\, dt$ **f)** $\displaystyle\int_1^e x \ln x\, dx$

g) $\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\, dx \quad (k \in \mathbb{Z})$ **h)** $\displaystyle\int_0^1 x\, e^{2x^2} \sin(e^{x^2})\, dx$ **i)** $\displaystyle\int_1^4 \arctan\sqrt{\sqrt{x}-1}\, dx$

Aufgabe 4

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale.

a) $\displaystyle\int^x \frac{e^t}{e^{2t}+1}\, dt$ **b)** $\displaystyle\int^x \frac{t}{\sqrt{1-t}}\, dt$ **c)** $\displaystyle\int^x \arcsin(t)\, dt$

Aufgabe 5

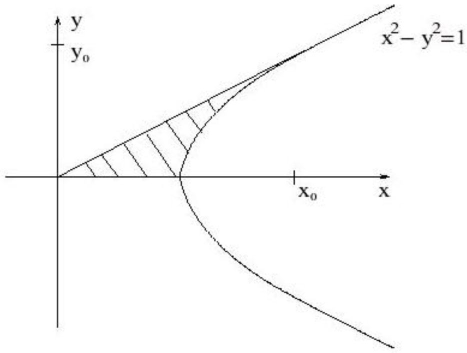
a) Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_x^{\sin x} \sin(e^t)\, dt$. Begründen Sie, dass F auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, und bestimmen Sie $F'(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

b) Ermitteln Sie alle lokalen Extremstellen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^x (1+4t)e^{t^2}\, dt + xe^{x^2}.$$

Aufgabe 6

Der Schnittpunkt der skizzierten Geraden mit der Hyperbel $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$ sei (x_0, y_0). Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt der schraffierten Fläche gleich $\frac{1}{2}\text{Arcosh}(x_0)$ ist.



Hinweis: Verwenden Sie $\text{Arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ für $x > 1$.

Aufgabe 7

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$a_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, dx\,.$$

Bestimmen Sie a_1 und a_2. Finden Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2$ eine Rekursionsformel zur Berechnung von a_n, wenn a_{n-2} bekannt ist. Ermitteln Sie hiermit a_3, a_4, a_5, a_6.

Aufgabe 8

a) Sei $a > 0$. Die Funktion $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ sei integrierbar und gerade, d.h. $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in [-a,a]$. Zeigen Sie:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx\,.$$

b) Seien $a > 0$ und $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, die ungerade ist, d.h. $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in [-a,a]$. Zeigen Sie:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0\,.$$

Aufgabe 9 (P)

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{für } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar ist.

Klausur zur HM I: Dienstag, 02.03.2010, 08:00 - 10:00 Uhr

Anmeldeschluss: Freitag, 12.02.2010 (Vorlesungsende WS 09/10)

Informationen zur Prüfungsanmeldung entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **2, 4, 5 und 7**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.