Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2009/10
04.02.2010

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

14. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_4(f,0)$ von $f\colon x \mapsto \ln(1+x)$ und zeigen Sie

$$0 \leqslant \ln(1+x) - T_4(f,0)(x) \leqslant \tfrac{1}{5}\,x^5 \qquad \text{für alle } x \geqslant 0\,.$$

b) Bestimmen Sie Zahlen a, b und c mit

$$\bigl|\ln(2+x) - a - bx\bigr| \leqslant c\,x^2 \qquad \text{für alle } x \in [-1,1]\,.$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie eine Näherung für $\sqrt{2}$ mit einem Fehler kleiner als 10^{-6} unter Verwendung des Satzes von Taylor und der Darstellung

$$\sqrt{2} = \frac{10}{7}\sqrt{1-\frac{1}{50}}\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie das zweite Taylorpolynom der Funktion $(-1,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{10}{7}\sqrt{1+x}$.

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie für jedes $x \in (-1,1)$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\,.$$

b) Folgern Sie aus **a)** eine Reihendarstellung der Zahl π.

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie eine Reihendarstellung der Funktion $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(1-x^2)$ um 0 und berechnen Sie $f^{(20)}(0)$ sowie $f^{(31)}(0)$.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{2,3\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2-x} + \frac{1}{3-x}\,.$$

Ermitteln Sie $f^{(2010)}(1)$.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie durch gliedweises Differenzieren den Wert der Potenzreihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2-n} \qquad \text{für } |x| < 1\,.$$

Aufgabe 6

Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+3)e^{nx}$$

konvergiert. Bestimmen Sie für diese x den Wert der Reihe.

Hinweis: Setzen Sie $y := e^x$ und klammern eine geeignete Potenz von y aus. Integrieren Sie dann die übrigbleibende Potenzreihe.

Aufgabe 7

Gesucht ist eine zweimal differenzierbare Funktion $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y'' = -\omega^2 y\,, \qquad y(0) = y_0\,, \qquad y'(0) = 0\,,$$

wobei ω und y_0 gegebene reelle Zahlen sind. Bestimmen Sie eine solche Funktion, indem Sie den Ansatz machen, y lasse sich als Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞ darstellen.

Aufgabe 8 (P)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' - 5y' + 4y = e^{2x}\,, \qquad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = -1\,.$$

b) Für die Geschwindigkeit $v(t)$ zum Zeitpunkt t einer vertikalen Bewegung im Schwerefeld g mit linearer Reibung gilt

$$v'(t) = g - \gamma v(t)$$

mit $\gamma > 0$. Lösen Sie diese Differentialgleichung für den Anfangswert $v(0) = v_0$.

Sprechstunden der Tutoren zur HM I: Montag, 22.02.10, und Dienstag, 23.02.10, jeweils von 14:00 bis 15:30 Uhr im HS 102 (Gebäude 10.50).

Klausur zur HM I: Dienstag, 02.03.2010, 08:00 - 10:00 Uhr

!!! Anmeldeschluss ist Freitag, der 12.02.2010 !!!

Informationen zur Prüfungsanmeldung entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **4, 5 und 6**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.