Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2009/10

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 15. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Hier kann man die Regel von de l'Hospital zweimal anwenden (jeweils „$\frac{\infty}{\infty}$" und die Ableitung des Nenners ist für hinreichend große x ungleich 0). Dies führt auf

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\qquad\text{(falls die Grenzwerte existieren),}$$

hilft also nicht, den Grenzwert zu berechnen. Einfaches Kürzen mit e^x liefert aber

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\frac{1-0}{1+0}=1\,.$$

b) Auch hier wenden wir zweimal hintereinander die Regel von de l'Hospital an (jeweils für „$\frac{0}{0}$"; die Ableitung des Nenners hat in der Nähe von 1 keine Nullstellen). Wegen $(x^x)'=(e^{x\ln x})'=x^x(x\ln x)'=x^x(1+\ln x)$ ergibt sich

$$\lim_{x\to1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{x^x(1+\ln x)-1}{-1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{x^x(1+\ln x)^2+x^x\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{1+1}{-1}=-2\,.$$

c) Wir versuchen, ob wir die Regeln von de l'Hospital anwenden können. Hier konvergieren Zähler und Nenner gegen 0, die Ableitung des Nenners ist in der Nähe von 0 ungleich 0, aber

$$\lim_{x\to0}\frac{(x^2\cos(1/x))'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to0}\frac{2x\cos(1/x)-x^2\sin(1/x)(-\frac{1}{x^2})}{\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{2x\cos(1/x)+\sin(1/x)}{\cos x}$$

existiert nicht, denn für $x_n:=((n+\frac{1}{2})\pi)^{-1}$ hat der Bruch den Wert $(-1)^n/\cos x_n$. Die Regel von de l'Hospital ist nicht anwendbar; der ursprüngliche Grenzwert existiert aber:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\cos(1/x)}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot x\cos(1/x)=1\cdot0=0\,.$$

d) Zu untersuchen ist hier $\lim_{x\to\infty}f(x)/g(x)$ für $f(x):=\int_0^x e^{t^2}\,dt$ und $g(x):=x^{-1}e^{x^2}$. Wir wenden die Regel von de l'Hospital an: Der zu untersuchende Grenzwert ist vom Typ „$\frac{\infty}{\infty}$" (Beachte: für $x\geqslant0$ gilt $f(x)\geqslant\int_0^x 1\,dt=x$) und wegen

$$f'(x)=e^{x^2},\qquad g'(x)=-x^{-2}e^{x^2}+x^{-1}e^{x^2}\cdot2x=(2-x^{-2})e^{x^2}$$

gilt: Die Ableitung des Nenners ist für hinreichend große x stets $\neq0$ und der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{(2-x^{-2})e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2-x^{-2}}=\frac{1}{2}$$

existiert. Folglich ist auch der zu untersuchende Grenzwert $\frac{1}{2}$.

e) Sowohl $f(x)$ als auch $g(x)$ streben für $x \to \infty$ gegen ∞. Als Ableitungen erhalten wir $f'(x) = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x$ und

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{\sin x} + f(x)e^{\sin x}\cos x = e^{\sin x}(2\cos^2 x + x\cos x + \sin x \cos^2 x) \\ &= e^{\sin x}\cos x\,(2\cos x + x + \sin x\cos x)\,. \end{aligned}$$

Also wird $g'(x)$ auch für beliebig große x durch den Faktor $\cos x$ immer wieder 0. Daher ist die Regel von de l'Hospital nicht anwendbar. Der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{e^{\sin x}}$$

existiert nicht (Betrachte z.B. $x_n := (n + \frac{1}{2})\pi$), obwohl für jene x, für die $g'(x) \neq 0$ ist, gilt:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2\cos x}{e^{\sin x}(2\cos x + x + \sin x\cos x)} \xrightarrow{x\to\infty} 0\,.$$

Aufgabe 2

Mit Potenzreihen kommt man hier sehr schnell ans Ziel: Wegen

$$\sin^2 x = \left(x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - + \ldots\right)^2 = x^2 - \tfrac{2}{3!}x^4 + (\tfrac{2}{5!} + (-\tfrac{1}{3!})^2)x^6 + \ldots$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - (x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + (\frac{2}{5!} + (-\frac{1}{3!})^2)x^6 + \ldots)}{x^2(x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + (\frac{2}{5!} + (-\frac{1}{3!})^2)x^6 + \ldots)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3!}x^4 - (\frac{2}{5!} + (-\frac{1}{3!})^2)x^6 - \ldots}{x^4 - \frac{2}{3!}x^6 + (\frac{2}{5!} + (-\frac{1}{3!})^2)x^8 + \ldots} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3!} - (\frac{2}{5!} + (-\frac{1}{3!})^2)x^2 - \ldots}{1 - \frac{2}{3!}x^2 + (\frac{2}{5!} + (-\frac{1}{3!})^2)x^4 + \ldots} = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

Mit der Regel von de l'Hospital dauert es etwas länger: Wir wenden sie viermal an; die entsprechenden Stellen sind mit $(*)$ gekennzeichnet.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} &\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2x - 2\sin x\cos x}{2x\sin^2 x + 2x^2\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x - \sin(2x)}{2x\sin^2 x + x^2\sin(2x)} \\ &\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2 - 2\cos(2x)}{2\sin^2 x + 4x\sin x\cos x + 2x\sin(2x) + 2x^2\cos(2x)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2 - 2\cos(2x)}{2\sin^2 x + 4x\sin(2x) + 2x^2\cos(2x)} \\ &\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{4\sin(2x)}{4\sin x\cos x + 4\sin(2x) + 8x\cos(2x) + 4x\cos(2x) - 4x^2\sin(2x)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4\sin(2x)}{(6 - 4x^2)\sin(2x) + 12x\cos(2x)} \\ &\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{8\cos(2x)}{-8x\sin(2x) + 2(6 - 4x^2)\cos(2x) + 12\cos(2x) - 24x\sin(2x)} \\ &= \frac{8}{0 + 12 + 12 + 0} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Für beliebiges $R > 2$ erhalten wir mittels der Substitution $t = \ln x$, $dt = x^{-1}\,dx$

$$\int_2^R \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln R}\frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\Big|_{\ln 2}^{\ln R} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln R}\,.$$

Für $R \to \infty$ strebt dies gegen $(\ln 2)^{-1}$; das uneigentliche Integral konvergiert also und hat diesen Wert.

b) Seien $s < 0$ und $t \in \mathbb{R}$ fest. Mit partieller Integration erhalten wir für jedes $R > 0$

$$\int_0^R e^{sx}\cos(tx)\,dx = \frac{e^{sx}}{s}\cdot\cos(tx)\Big|_{x=0}^{R} + \int_0^R \frac{e^{sx}}{s}\cdot t\sin(tx)\,dx\,.$$

Erneute partielle Integration liefert für das letzte Integral

$$\int_0^R \frac{e^{sx}}{s}\cdot t\sin(tx)\,dx = \frac{e^{sx}}{s^2}\cdot t\sin(tx)\Big|_{x=0}^{R} - \int_0^R \frac{e^{sx}}{s^2}\cdot t^2\cos(tx)\,dx\,.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{t^2}{s^2}\right)\int_0^R e^{sx}\cos(tx)\,dx &= \frac{e^{sx}}{s}\cos(tx)\Big|_{x=0}^{R} + \frac{e^{sx}}{s^2}\,t\sin(tx)\Big|_{x=0}^{R}\\ &= \frac{e^{sR}}{s}\cos(tR) - \frac{1}{s} + \frac{e^{sR}}{s^2}\,t\sin(tR) - 0 \xrightarrow{R\to\infty} -\frac{1}{s}\,.\end{aligned}$$

(Man beachte $s < 0$.) Also konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx$ und es gilt

$$\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx = -\frac{1}{s}\left(1+\frac{t^2}{s^2}\right)^{-1} = -\frac{s}{s^2+t^2}\,.$$

Bemerkung: Wir haben eben die Laplacetransformierte der Funktion $[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\cos(tx)$ an der Stelle $-s$ bestimmt ($\to$ HM II bzw. KAI).

Aufgabe 4

a) Da der Integrand $f(x) := \frac{1}{2\sqrt{x}-x^2}$ auf $(0,1]$ stetig ist, ist f auf jedem Intervall $[\varepsilon,1]$, $0<\varepsilon<1$, integrierbar. Für alle $x\in(0,1]$ gilt $x^2 \leqslant \sqrt{x}$ und damit

$$|f(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x}-x^2} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x}-\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

Da das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ konvergiert, ist $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}-x^2}\,dx$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.

b) Bekanntlich gilt $x^\alpha \ln x \xrightarrow{x\to 0+} 0$ für jedes $\alpha > 0$, insbesondere also

$$x^{1/2}(\ln x)^4 = (x^{1/8}\ln x)^4 \xrightarrow{x\to 0+} 0\,.$$

Mit einem gewissen $\varepsilon > 0$ besteht daher für alle $x \in (0,\varepsilon]$ die Abschätzung

$$|x^{1/2}(\ln x)^4| \leqslant 1\,, \qquad \text{also} \qquad |(\ln x)^4| \leqslant x^{-1/2}\,.$$

Mit Hilfe des Majorantenkriteriums folgt daraus die Konvergenz von $\int_0^\varepsilon (\ln x)^4\,dx$, also auch die Konvergenz von $\int_0^1 (\ln x)^4\,dx = \int_0^\varepsilon (\ln x)^4\,dx + \int_\varepsilon^1 (\ln x)^4\,dx$.

Bemerkung: Um den Wert des uneigentlichen Integrals auszurechnen, bestimmen wir durch mehrmalige partielle Integration eine Stammfunktion von $t\mapsto(\ln t)^4$

$$\begin{aligned}\int^x (\ln t)^4\,dt &= \int^x 1\cdot(\ln t)^4\,dt = x\cdot(\ln x)^4 - \int^x t\cdot\frac{4(\ln t)^3}{t}\,dt = x\cdot(\ln x)^4 - 4\int^x 1\cdot(\ln t)^3\,dt\\ &= x\cdot(\ln x)^4 - 4x\cdot(\ln x)^3 + 12\int^x (\ln t)^2\,dt\\ &= x\cdot(\ln x)^4 - 4x\cdot(\ln x)^3 + 12x\cdot(\ln x)^2 - 24\int^x \ln t\,dt\\ &= x\cdot(\ln x)^4 - 4x\cdot(\ln x)^3 + 12x\cdot(\ln x)^2 - 24x\cdot\ln x + 24x + k\,, \qquad k\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Also gilt für jedes $\varepsilon \in (0,1)$

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 (\ln x)^4\,dx &= \big[x\cdot(\ln x)^4 - 4x\cdot(\ln x)^3 + 12x\cdot(\ln x)^2 - 24x\cdot\ln x + 24x\big]_\varepsilon^1 \\ &= 24 - \varepsilon\cdot(\ln\varepsilon)^4 + 4\varepsilon\cdot(\ln\varepsilon)^3 - 12\varepsilon\cdot(\ln\varepsilon)^2 + 24\varepsilon\cdot\ln\varepsilon - 24\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} 24\,.\end{aligned}$$

Hiermit haben wir erneut die Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_0^1 (\ln x)^4\,dx$ gezeigt und gleichzeitig noch den Wert 24 ermittelt.

c) Da

$$\left|\frac{e^{2x}}{1+e^x}\right| = \frac{e^{2x}}{1+e^x} \leqslant \frac{e^{2x}}{e^x} = e^x$$

für alle $x \in (-\infty, 3]$ gilt und das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^3 e^x\,dx = \lim_{r\to-\infty}\int_r^3 e^x\,dx = \lim_{r\to-\infty}[\,e^x\,]_r^3 = \lim_{r\to-\infty}(e^3 - e^r) = e^3$$

existiert, ist $\int_{-\infty}^3 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.

d) Aus der Ungleichung $1+t \leqslant e^t$ folgt $\ln(1+t) \leqslant t$ für alle $t \geqslant 0$. Also ist

$$|e^{-t}\ln(1+t)| \leqslant te^{-t} \qquad \text{für alle } t \geqslant 0\,.$$

Da das uneigentliche Integral $\int_0^\infty te^{-t}\,dt$ (vgl. Aufgabe 5 mit $n=1$ und $\lambda=1$) existiert, konvergiert das zu untersuchende Integral nach dem Majorantenkriterium.

Aufgabe 5

Wir zeigen zunächst, dass das uneigentliche Integral $I_0(1)$ konvergiert und dass sein Wert $=1$ ist:

$$I_0(1) = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\big[-e^{-x}\big]_{x=0}^R = \lim_{R\to\infty} -e^{-R} + e^{-0} = 1\,.$$

Nun sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Partielle Integration mit $f(x) = x^n$ und $g'(x) = e^{-x}$ liefert

$$\begin{aligned} I_n(1) &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R x^n e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left(\big[x^n(-e^{-x})\big]_{x=0}^R - \int_0^R nx^{n-1}(-e^{-x})\,dx\right) \\ &= \lim_{R\to\infty} -R^n e^{-R} + nI_{n-1}(1) = nI_{n-1}(1)\,. \qquad (*)\end{aligned}$$

Aus dieser Rekursionsformel folgt per vollständiger Induktion, dass das Integral $I_n(1)$ konvergiert mit Wert $n!$ für alle $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$:
IA: $n=0$. Zu Beginn haben wir gesehen, dass $I_0(1)$ konvergiert und dass $I_0(1) = 1 = 0!$ gilt.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Das Integral $I_n(1)$ konvergiere und es gelte $I_n(1) = n!$ (IV). Damit ergibt sich

$$I_{n+1}(1) \overset{(*)}{=} (n+1)I_n(1) \overset{\text{(IV)}}{=} (n+1)n! = (n+1)!\,.$$

Für jedes $\lambda > 0$ und $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ führt die Substitution $y = \lambda x, dy = \lambda\,dx$ auf

$$\begin{aligned} I_n(\lambda) &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R x^n e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^{\lambda R}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^n e^{-y}\,\frac{dy}{\lambda} = \lambda^{-(n+1)}\lim_{R\to\infty}\int_0^{\lambda R} y^n e^{-y}\,dy \\ &= \lambda^{-(n+1)} I_n(1) = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}\,.\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Funktion $I_n\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto I_n(\lambda) := \int_0^\infty x^n e^{-\lambda x}\,dx$ entspricht der Laplace-transformierten des Monoms $[0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ ($\to$ HM II bzw. KAI).

Aufgabe 6

1. Fall: $s < 0$. Für jedes $x \geqslant 1$ gilt $x^s \leqslant x^0 = 1$ und $x^{1/s} \leqslant x^0 = 1$, so dass $\frac{1}{x^s + x^{1/s}} \geqslant \frac{1}{2}$ ist. Wegen der Divergenz von $\int_1^\infty \frac{1}{2}\,dx$ liefert das Minorantenkriterium die Divergenz des uneigentlichen Integrals $\int_1^\infty \frac{1}{x^s+x^{1/s}}\,dx$. Infolgedessen ist I_s divergent.

2. Fall: $s \in (0,1)$. Wir zeigen, dass sowohl $\int_0^1 \frac{1}{x^s+x^{1/s}}\,dx$ als auch $\int_1^\infty \frac{1}{x^s+x^{1/s}}\,dx$ konvergieren. Hieraus folgt dann die Konvergenz von I_s.
Für jedes $x > 0$ gilt $\frac{1}{x^s+x^{1/s}} \leqslant \frac{1}{x^s}$. Da $\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx$ gemäß Beispiel 16.2 konvergiert, ist $\int_0^1 \frac{1}{x^s+x^{1/s}}\,dx$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.
Für jedes $x > 0$ gilt $\frac{1}{x^s+x^{1/s}} \leqslant \frac{1}{x^{1/s}}$. Da $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1/s}}\,dx$ wegen $1/s > 1$ konvergiert (vgl. Beispiel 16.2), ist $\int_1^\infty \frac{1}{x^s+x^{1/s}}\,dx$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.

3. Fall: $s = 1$. $I_1 = \int_0^\infty \frac{1}{2x}\,dx$ ist divergent (vgl. Beispiel 16.2).

4. Fall: $s > 1$. Ist $q := 1/s$ gesetzt, so gilt $q \in (0,1)$. Daher konvergiert laut Fall 2

$$I_q = \int_0^\infty \frac{1}{x^q + x^{1/q}}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{x^{1/s} + x^s}\,dx = I_s\,.$$

Fazit: I_s ist genau dann konvergent, wenn $s > 0$ und $s \neq 1$ gilt.

Aufgabe 7

Sei $\alpha > 0$. Die durch $f(x) := \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ definierte Funktion $f\colon [2,\infty) \to (0,\infty)$ ist monoton fallend. Denn: Für beliebige $x, y \in [2,\infty)$ mit $x \leqslant y$ gilt $\ln x \leqslant \ln y$ und somit $(\ln x)^\alpha \leqslant (\ln y)^\alpha$. Deshalb ergibt sich $x(\ln x)^\alpha \leqslant y(\ln y)^\alpha$, woraus $f(y) \leqslant f(x)$ folgt.
Nach dem Integralkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=2}^\infty f(n)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral

$$\int_2^\infty f(x)\,dx = \int_2^\infty \frac{1}{x\,(\ln x)^\alpha}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_2^R \frac{1}{x\,(\ln x)^\alpha}\,dx$$

konvergiert. Die Substitution $y := \ln x$, $dy = \frac{1}{x}\,dx$ liefert

$$\int_2^R \frac{1}{x\,(\ln x)^\alpha}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{1}{y^\alpha}\,dy\,.$$

Im Fall $\alpha \leqslant 1$ divergiert die rechte Seite für $R \to \infty$, im Fall $\alpha > 1$ konvergiert die rechte Seite für $R \to \infty$ (vgl. Beispiel 16.2). Also konvergiert die Reihe genau für $\alpha > 1$.