Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2009/10
11.02.2010

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

15. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie jeweils, ob die Regel von de l'Hospital anwendbar ist, und berechnen Sie den Grenzwert, falls er existiert.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(1/x)}{\sin x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$

e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $f(x) := x + \sin(x)\cos(x)$ und $g(x) := f(x)e^{\sin x}$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

auf zwei verschiedene Arten: Mittels Potenzreihen und mit der Regel von de l'Hospital.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\,(\ln x)^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx \qquad (s<0,\ t\in\mathbb{R}\text{ fest})$

Aufgabe 4

Untersuchen Sie folgende uneigentliche Integrale auf Konvergenz.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x} - x^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 (\ln x)^4\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^3 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\ln(1+t)\,dt$

Aufgabe 5

Es sei $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ das uneigentliche Integral

$$I_n(\lambda) := \int_0^\infty x^n e^{-\lambda x}\, dx$$

konvergiert, und berechnen Sie $I_n(\lambda)$.

Hinweis: Drücken Sie $I_n(\lambda)$ mittels $I_n(1)$ aus und finden Sie mit Hilfe von partieller Integration eine Rekursionsformel, wie man $I_{n+1}(1)$ berechnen kann, wenn $I_n(1)$ bekannt ist.

Aufgabe 6

In Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei das uneigentliche Integral

$$I_s := \int_0^\infty \frac{1}{x^s + x^{1/s}}\, dx$$

gegeben. Bestimmen Sie alle s, für die I_s konvergiert.

Hinweis: Betrachten Sie die Fälle $s < 0$, $s \in (0, 1)$, $s = 1$ und $s > 1$.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums alle $\alpha > 0$, für welche die Reihe

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$$

konvergiert.

Sprechstunden der Tutoren zur HM I: Montag, 22.02.10, und Dienstag, 23.02.10, jeweils von 14:00 bis 15:30 Uhr im HS 102 (Gebäude 10.50).

Klausur zur HM I: Dienstag, 02.03.2010, 08:00 - 10:00 Uhr

!!! Anmeldeschluss ist Freitag, der 12.02.2010 !!!

Informationen zur Prüfungsanmeldung entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage.