Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski

WS 2009/10
30.01.2010

Übungsklausur

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

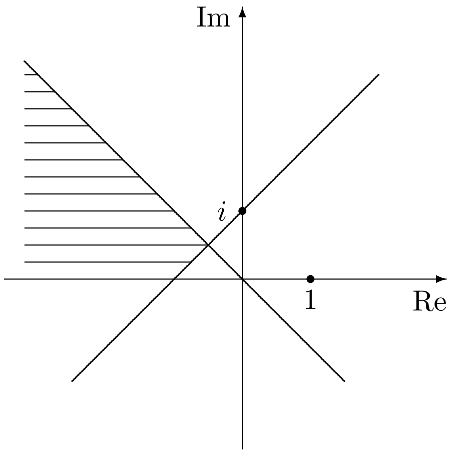
Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) (2 Punkte) Durch $\mathrm{Re}(z+3i) < \mathrm{Im}(z)$ bzw. $\mathrm{Re}(z) < \mathrm{Im}(z)$ wird der Teil der komplexen Zahlenebene charakterisiert, der oberhalb der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten liegt. Daher wird durch $\mathrm{Re}(z+3i) < \mathrm{Im}(z) - 1$ der Teil der komplexen Zahlenebene charakterisiert, der oberhalb der um 1 nach oben verschobenen Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten liegt.

Der Bedingung $\frac{3\pi}{4} < \arg(z) < \pi$ genügen genau die komplexen Zahlen, die im 2. Quadranten (echt) zwischen der Winkelhalbierenden des 2. und 4. Quadranten und der rellen Achse liegen.

Insgesamt ergibt sich: A ist der in der folgenden Skizze schraffierte Bereich, wobei der Rand der schraffierten Fläche nicht dazugehört.



b) (4 Punkte) Wir stellen $z \in \mathbb{C}$ in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar. Dann gilt

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2xyi + i^2y^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy),$$

und die zwei gegebenen Gleichungen lassen sich somit schreiben als

$$x^2 - y^2 = 2 \qquad \text{und} \qquad 2xy = -4y.$$

1. Fall: $y = 0$. Dann ist die zweite Gleichung stets erfüllt und die erste lautet $x^2 = 2$. Dies bedeutet: $x = \sqrt{2}$ oder $x = -\sqrt{2}$.

2. Fall: $y \neq 0$. Dividiert man die zweite Gleichung durch y, so folgt $2x = -4$, also $x = -2$. Die erste Gleichung lautet dann $(-2)^2 - y^2 = 2$, also $y^2 = 2$. Dies bedeutet: $y = \sqrt{2}$ oder $y = -\sqrt{2}$.

Somit erfüllt $z \in \mathbb{C}$ genau dann die Gleichungen, wenn $z \in \left\{\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ -2+i\sqrt{2},\ -2-i\sqrt{2}\right\}$.

Nur die Lösung $-2+i\sqrt{2}$ liegt in der Menge A.

c) (4 Punkte) Nach einer Indexverschiebung erhält man mit Hilfe der geometrischen Summenformel

$$\sum_{k=2}^{13}(1+i)^k = (1+i)^2\sum_{l=0}^{11}(1+i)^l = (1+2i-1)\,\frac{1-(1+i)^{12}}{1-(1+i)} = -2\big(1-(1+i)^{12}\big)\,.$$

Wegen $|1+i| = \sqrt{2}$ und $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ ist $1+i = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$. Damit ergibt sich

$$\sum_{k=2}^{13}(1+i)^k = -2\big(1-(\sqrt{2}\,e^{i\pi/4})^{12}\big) = -2\big(1-2^6\,e^{3i\pi}\big) = -2\big(1-64\cdot(-1)\big) = -130\,.$$

Also ist

$$\operatorname{Re}\sum_{k=2}^{13}(1+i)^k = -130 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Im}\sum_{k=2}^{13}(1+i)^k = 0\,.$$

Aufgabe 2

a) i) (2 Punkte) Für jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{\sqrt{n}+1}{(3\sqrt[4]{n}+4\sqrt[5]{n})^2} = \frac{\sqrt{n}+1}{\big(\sqrt[4]{n}\,(3+4n^{\frac15-\frac14})\big)^2} = \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}\,(3+4n^{-\frac{1}{20}})^2} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{(3+\frac{4}{\sqrt[20]{n}})^2}\,.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\sqrt{n}}) = 1$ und $\lim_{n\to\infty}(3+\frac{4}{\sqrt[20]{n}}) = 3 \neq 0$ konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach den Grenzwertsätzen gegen $\frac{1}{3^2} = \frac19$.

ii) (3 Punkte) Für jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$2 = \sqrt[n]{2^n} \leqslant a_n \overset{(*)}{\leqslant} \sqrt[n]{2^n+2^n} = \sqrt[n]{2\cdot 2^n} = \sqrt[n]{2}\cdot 2\,.$$

Wegen $\sqrt[n]{2}\to 1$ $(n\to\infty)$ folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.
Es verbleibt die Abschätzung $n\leqslant 2^n$, $n\in\mathbb{N}$, in $(*)$ zu begründen: Diese ergibt sich z.B. unter Verwendung des binomischen Lehrsatzes aus

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{1} = n\,.$$

b) (5 Punkte) Unter Verwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhält man

$$n^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}1\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)^2 \leqslant \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{a_k})^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{\sqrt{a_k}}\Big)^2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right).$$

Alternativ: Beweis durch vollständige Induktion.
IA: Für $n=1$ gilt $a_1\,\frac{1}{a_1} = 1 \geqslant 1 = 1^2$.
IS: Sei $n\in\mathbb{N}$. Es gelte $\big(\sum_{k=1}^{n}a_k\big)\big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\big) \geqslant n^2$ (IV). Dann folgt

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n+1}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{a_k}\right) &= \left(a_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\frac{1}{a_{n+1}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\\ &= \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} + a_{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_{n+1}}\sum_{k=1}^{n}a_k + \left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\\ &\overset{\text{(IV)}}{\geqslant} 1 + \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left(\frac{a_{n+1}}{a_k}+\frac{a_k}{a_{n+1}}\right)}_{\overset{(*)}{\geqslant}2} + n^2 \geqslant 1+2n+n^2 = (n+1)^2\,.\end{aligned}$$

In $(*)$ verwendeten wir den Hinweis $x+\frac1x\geqslant 2 \Leftrightarrow x^2+1\geqslant 2x \Leftrightarrow (x-1)^2\geqslant 0$ für $x>0$.

Aufgabe 3

a) **(7 Punkte)** Ist für $n \in \mathbb{N}$

$$a_n := \frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)\,2^{4n}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \cdot \frac{1}{2^n}$$

gesetzt, so gilt

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[4]{\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}} \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[4]{\frac{1}{1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,,$$

denn $1 \leftarrow \sqrt[n]{n} \leqslant \sqrt[n]{n+1} \leqslant \sqrt[n]{n+n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \to 1 \cdot 1 = 1$ für $n \to \infty$.

Der Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x+3)^n$ beträgt also $R = 2$. Deshalb ist diese Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x+3| < 2$, d.h. für $-5 < x < -1$, konvergent und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x+3| > 2$ divergent, d.h. für $x < -5$ oder $x > -1$. Zu untersuchen verbleibt der Fall $x \in \mathbb{R}$ mit $|x+3| = 2$, also $x = -5$ oder $x = -1$:

Für $x = -5$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \cdot \frac{1}{2^n}\,(-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}}\,(-1)^n\,.$$

Wegen $\frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \to 0$ für $n \to \infty$ und $n+1 \leqslant n+2 \Rightarrow \frac{1}{n+2} \leqslant \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{n+2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}}$ ist $(\frac{1}{\sqrt[4]{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Deshalb konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}}\,(-1)^n$ nach dem Leibnizkriterium.

Im Fall $x = -1$ ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \cdot \frac{1}{2^n}\,2^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}}$$

divergent, weil die harmonische Reihe wegen $\frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \geqslant \frac{1}{n+1}$ eine divergente Minorante ist.

Fazit: Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)\,2^{4n}}}\,(x+3)^n$ konvergiert genau für $x \in [-5,-1)$.

Da die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)\,2^{4n}}}\,(x+3)^n$ den Konvergenzradius 2 besitzt, liegt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x+3| < 2$, d.h. $-5 < x < -1$, absolute Konvergenz vor. Wie obiger Untersuchung zu entnehmen ist, ist die gegebene Potenzreihe für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x+3| = 2$ nicht absolut konvergent. Da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)\,2^{4n}}}\,(x+3)^n$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x+3| > 2$ divergiert, liegt für solche x keine absolute Konvergenz vor.

Fazit: Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)\,2^{4n}}}\,(x+3)^n$ ist genau für $|x+3| < 2$, d.h. $x \in (-5,-1)$, absolut konvergent.

b) **(3 Punkte)** Wegen

$$\frac{\frac{k!}{k^k}}{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}} = \frac{k!}{k^k} \cdot \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{k!}{(k+1)!} \cdot \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}$$
$$= \frac{(k+1)^k}{k^k} = \Big(\frac{k+1}{k}\Big)^k = \Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^k \xrightarrow{k\to\infty} e$$

ist der Konvergenzradius der Potenzreihe e.

Aufgabe 4

a) (4 Punkte) Für jedes $x \in [0,1)$ gilt

$$f_n(x) = \frac{x^n - 1}{x^n + 1} \xrightarrow{n\to\infty} -1\,,$$

da $x^n \to 0$ $(n \to \infty)$. Für $x = 1$ gilt $x^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $f_n(1) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ist. Im Fall $x > 1$ ergibt sich

$$f_n(x) = \frac{x^n - 1}{x^n + 1} = \frac{1 - x^{-n}}{1 + x^{-n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1\,,$$

da $x^{-n} = \frac{1}{x^n} \to 0$ $(n \to \infty)$. Also konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,\infty)$ punktweise gegen die Grenzfunktion

$$f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\; x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{für } 0 \leqslant x < 1, \\ 0 & \text{für } x = 1, \\ 1 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

b) (2 Punkte) Wegen $\lim_{x\to 1+} f(x) = 1 \neq 0 = f(1)$ ist f unstetig auf $[0,2]$. Da jede der Funktionen f_n auf $[0,2]$ stetig ist, konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,2]$ nicht gleichmäßig gegen f.

c) (4 Punkte) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0, \frac{1}{2}]$ gilt

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| = \big|f_n(x) - (-1)\big| = \left|\frac{x^n - 1}{x^n + 1} + \frac{x^n + 1}{x^n + 1}\right| = \frac{2x^n}{x^n + 1} \leqslant 2x^n \overset{0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}}{\leqslant} 2\Big(\frac{1}{2}\Big)^n.$$

Folglich ist

$$\sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant 2\Big(\frac{1}{2}\Big)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,,$$

d.h. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist auf $[0, \frac{1}{2}]$ gleichmäßig konvergent.