Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski

WS 2009/10
30.01.2010

Übungsklausur
Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene die Menge

$$A := \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \operatorname{Re}(z+3i) < \operatorname{Im}(z) - 1 \ \text{ und } \ \tfrac{3\pi}{4} < \arg(z) < \pi \right\}.$$

b) Geben Sie alle $z \in \mathbb{C}$ an, die gleichzeitig die beiden folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\operatorname{Re}(z^2) = 2 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Im}(z^2) = -4\operatorname{Im}(z).$$

Welche dieser Zahlen liegen in der Menge A?

c) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil von

$$\sum_{k=2}^{13} (1+i)^k .$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Untersuchen Sie jeweils die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

i) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{(3\sqrt[4]{n} + 4\sqrt[5]{n})^2}$;

ii) $a_n = \sqrt[n]{2^n + n}\,.$

b) Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$ reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. Beweisen Sie

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geqslant n^2 .$$

Hinweis: Cauchy-Schwarzsche Ungleichung oder vollständige Induktion.

Unter Umständen ist die Ungleichung $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ für $x > 0$ (Beweis?) nützlich.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, in denen die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)\,2^{4n}}}\,(x+3)^n$$

konvergiert. Geben Sie alle $x \in \mathbb{R}$ an, in denen absolute Konvergenz vorliegt.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}\,x^k\,.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion

$$f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_n(x) := \frac{x^n - 1}{x^n + 1}$$

gegeben.

a) Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise Konvergenz.

b) Ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,2]$ gleichmäßig konvergent?

c) Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,\frac{1}{2}]$ gleichmäßig konvergent?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können ab Dienstag, den 09.02.2010, im Sekretariat (Zimmer 3B-02, Allianzgebäude 05.20) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am Donnerstag, den 11.02.2010, von 13.15 Uhr bis 13.30 Uhr im Zimmer 3A-01 (Allianzgebäude 05.20) möglich.