Vorlesungszusammenfassung

HMI für Elektroingenieurwesen, Physik, Geodäsie

Kap 1 Grundtatsachen der Aussagenlogik

1.1 Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr (W) oder falsch (F) ist.

1.2 Verknüpfung von Aussagen durch Junktoren $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$: Sind A, B Aussagen, so werden die Aussagen $\neg A$, $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ durch ihre Wahrheitswerte in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten von A und B wie folgt durch die folgende Wahrheitswerttafel definiert:

A	$\neg A$	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	F	W	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F
F	W	W	F	W	W	F
F	W	F	F	F	W	W

$\neg A$ (nicht A) ist F nur, wenn A W ist

$A \wedge B$ (A und B) ist nur W, wenn A und B beide W sind

$A \vee B$ (A oder B) ist nur F, wenn A und B beide F sind

$A \Rightarrow B$ (aus A folgt B, wenn A dann B, B ist notwendig für A) ist nur dann F, falls $\neg A$ und B beide F sind

$A \Leftrightarrow B$ (A ist äquivalent zu B, A ist notwendig und hinreichend für A) ist nur dann W, wenn A und B dieselben Wahrheitswerte haben.

Bemerkungen

1) $A \wedge (\neg A)$ ist stets F

2) $A \vee (\neg A)$ ist stets W

3) $A \Rightarrow B$ ist W, wenn A F ist unabhängig vom Wahrheitswert von B

<u>Satz 1</u> A, B, C seien Aussagen. Es gelten:

1) $\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B)$

$\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$

2) $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (*)

$\iff (\neg A) \vee B$

$\iff (A \wedge \neg B \Rightarrow C \wedge \neg C)$ (**)

3) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

4) $(A \iff B) \iff ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$

1.3 Direkter / Indirekter Beweis des Satzes: $A \Rightarrow B$

(A ist Voraussetzung
B ist Behauptung)

<u>Direkter Beweis</u>

(1. Zeile der Wa-Tafel)

A ist als Vor apriori w. Folgere (richtig) B. Dann ist B w.

<u>Beispiel</u> p sei eine natürliche Zahl. Es gilt:

Ist p gerade, so ist p^2 gerade

<u>Indirekter Beweis</u> ((*), (**) oben; letzte Zeile der Wa-Tafel)

Nimm an, B ist F: gehe von $\neg B$ aus.

Folgere auf richtige Weise etwas Falsches: etwa $\neg A$ ((*)) oder $C \wedge \neg C$ ((**)). Dann muss der Ausgangspunkt $\neg B$ F also B w sein.

<u>Beispiel</u> p sei eine natürliche Zahl. Es gilt:

Ist p^2 gerade, so ist p gerade.

<u>Satz 2</u> (Zusammenfassen der beiden Beispiele).

Es sei p eine natürliche Zahl. Es gilt:

p ist gerade $\iff$ p^2 ist gerade.

Satz 3 $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

1.4 Die Quantoren $\forall$, $\exists$.

Trifft die Aussage $A(x)$ für alle x mit einer bestimmten Eigenschaft zu, so schreiben wir: $\underline{\forall_x A(x)}$.

Gibt es (mindestens) ein x mit dieser Eigenschaft, für das $A(x)$ zutrifft, so wird das in der Form

$\underline{\exists_x A(x)}$ ausgedrückt.

Verneinung:
$$\neg\left(\forall_x A(x)\right) \iff \exists_x\left(\neg A(x)\right)$$
$$\neg\left(\exists_x A(x)\right) \iff \forall_x\left(\neg A(x)\right)$$

Beispiele x sei eine reelle Zahl

1) $\exists_x\ x^2 = 1$ ist w

$\neg\left(\exists_x\ x^2 = 1\right) \iff \forall_x\ x^2 \neq 1$ ist F

2) $\exists_x\ x^2 + x + 1 = 0$ ist F

Die Negation: $\forall_x\ x^2 + x + 1 \neq 0$ ist w.

Kap 2 Grundbegriffe der Mengenlehre

2.1 Eine Menge ist die Zusammenfassung wohlbestimmter, wohlunterschiedener Objekte der Anschauung oder des Denkens zu einem neuen Ganzen.

„$x \in M$" bedeutet: das Objekt (Element) x gehört zur Menge M

$(x \notin M) :\iff \neg(x \in M)$ (x liegt nicht in M)

Für jede Menge M und jedes Objekt x muss unzweideutig gelten: entweder $x \in M$ oder $x \notin M$.

Schreibweise: $M = \underbrace{\{x \mid x \text{ besitzt die Eigenschaft } E\}}$

„alle Elemente, die die Eigenschaft E besitzen, bilden die Menge M".

2.2 $\emptyset$ bezeichnet die leere Menge, die Menge, die keine Elemente enthält: die Aussage

„$x \in \emptyset$" ist stets F.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ bezeichnen die Mengen der natürlichen, der ganzen, der rationalen, der reellen, der komplexen Zahlen.

2.3 Inklusion (A, B sind beliebige Mengen)

$(A \subset B)$ („A ist Teilmenge von B"$) :\Leftrightarrow \underset{x \in A}{\forall}\ x \in B$

$(A \not\subset B)$ („A liegt nicht in B"$) :\Leftrightarrow \neg(A \subset B)$

$\Leftrightarrow \underset{x \in A}{\exists}\ x \notin B$

Gleichheit

$(A = B) :\Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$

Bemerkung: Bei „$\subset$" ist die Gleichheit nicht ausgeschlossen. Es gilt also z.B. $A \subset A$ für jede Menge A

Beispiele: 1) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Hier gilt nirgends die Gleichheit. $\mathbb{Q}$ etwa ist echte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

2) $\emptyset \subset A$ für jede Menge A 3) $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$

2.4 Die Mengenoperationen: $\cap, \cup, \setminus$.

A, B sind beliebige Mengen.
$A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ sind die wie folgt definierten Mengen:

$A \cap B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ (Durchschnitt von A und B)

$A \cup B := \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$ Vereinigung von A und B

$A \setminus B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$ Differenz von A und B

Falls $B \subset A$: $C_A B := A \setminus B$ Komplement von B bezüglich A

Satz 1 („Rechnen" mit Mengen)

A, B, C seien beliebige Mengen. Es gelten:

1) $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$

2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4) $(A \subset B) \Rightarrow (A \cap C) \subset (B \cap C)$

$(A \subset B) \Rightarrow (A \cup C) \subset (B \cup C)$

5) $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$

$A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$

6) $(B \subset A) \Rightarrow A \setminus (A \setminus B) = B \quad (= C_A(C_A B))$

7) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

8) $A \cup \emptyset = A$, $A \setminus \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$

9) $(A \subset B) \Longleftrightarrow (A \cup B = B) \Longleftrightarrow (A \cap B = A)$

Versuchen Sie Beweise. Oder machen Sie sich diese Aussagen wenigstens anschaulich klar.