11.2 Der Konvergenzradius. Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe

$R := \sup\{|z-z_0| \mid \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ ist konvergent$\}$

heißt Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$.

Es gelten (Umformulierung von Satz 1 und der Def von R):

Für $|z-z_0|<R$ ist die Reihe absolut konvergent, für $|z-z_0|>R$ liegt Divergenz vor. Ob die Reihe für z mit $|z-z_0|=R$ konvergiert, muss extra untersucht werden.

Bemerkungen / Beispiele

1) Im Fall $R=\infty$ liegt für jedes z absolute Konvergenz vor, im Fall $R=0$ nur für $z=z_0$.

2) Der Konvergenzbereich ist im Komplexen der Kreis $\{z \mid |z-z_0|<R\}$, im Reellen das Intervall

$$\{x \mid |x-x_0|<R\} = \{x \mid x_0-R<x<x_0+R\}.$$

3) $\sum_{k=0}^{\infty} k!\, z^k$, $R=0$

4) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$, $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $R=\infty$

5) $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$, $R=1$. Das Verhalten für $|z|=1$ ist unterschiedlich.

Satz 2 Es liegt $(P): \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_k \neq 0$ für $k \geq k_0$ vor. Es gilt $R = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ (wobei $R=\infty$ zugelassen ist), falls der lim existiert.

Bemerkung:

Dies ist eine einfache Anwendung des Quotienten=kriteriums. Wendet man analog das Wurzelkriterium an, so erhält man: Existiert $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \alpha$, so ist $R = \frac{1}{\alpha}$ (mit $R=0$ für $\alpha=\infty$ und $R=\infty$ für $\alpha=0$).

Beispiele: 1) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{2k+2}}{\sqrt{k-1}} (z-z_0)^k$, $R = \frac{1}{4}$

2) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} z^k$, $R = 2$

11.3

Satz 3 R sei der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Für z mit $|z|<R$ wird dann durch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ die Funktion p : $p(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $|z|<R$ definiert. p ist für jedes z mit $|z|<R$ stetig.

Satz 4 (Identitätssatz)

Es sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ für $|z|<R$ gegeben.

Es existiere eine Folge (z_k) mit $0<|z_k|<R$, $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$ und $f(z_k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Dann gelten: $a_k = 0$, $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ (oder $f = 0$).

Anwendungen hiervon:

1) Aus $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ für $|z|<r$ folgt $c_k = b_k$ für $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. (Koeffizientenvergleich)

2) Wird f durch eine Potenzreihe in $|z|<R$ gegeben:

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, so folgt aus $f(z) = f(-z)$

(aus $f(z) = -f(-z)$) $a_{2\ell+1} = 0$, $\ell = 0, 1, \ldots$

($a_{2\ell} = 0$, $\ell = 0, 1, \ldots$)

3) Es sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ für $|z|<R$ gegeben.

Es sei a_0 $(= f(0)) \neq 0$. Dann erhält man formal eine Potenzreihendarstellung um 0 für $\frac{1}{f(z)}$

so: $\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$. Aus

$$1 = f(z) \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{k} a_{k-\ell} b_\ell\right) z^k$$

folgen für die b_j die Rekursionsformeln

$$b_0 = \frac{1}{a_0}, \quad b_k = -\frac{1}{a_0} \sum_{\ell=0}^{k-1} a_{k-\ell} b_\ell \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

(Testen Sie das mit $f(z) = e^z$, $f(z) = 1 - z$).

12. Kapitel Die elementaren Funktionen

12.1 Kümmern Sie sich mit der Literatur und durch die Übungen an die Exponentialfunktion (a^x für $a > 0$) und die Umkehrfunktion ($\log_a(x)$, $x > 0$ $(a \neq 1)$)

um die Hyperbelfunktionen $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, $\tanh(x)$, $\coth(x)$ und deren Umkehrfunktionen (den sog. Areafunktionen)

z.B. ist $\operatorname{arsinh}(x)$ (Area-Sinus-Hyperbolicus) die Auflösung der Gleichung

$$\sinh(y) = x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \text{ nach } y.$$

und um die trigonometrischen Funktionen sin, cos, tan, cot und deren Umkehrungen (arc sin, arc cos, ... — die Arcusfunktionen) z.B. ist der Sinus auf dem Intervall $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ injektiv, also zu einem arc sin umkehrbar: $y = \arcsin(x)$, $-1 \leq x \leq 1 \iff x = \sin y$, $\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{3\pi}{2}$

12.2 Satz 1 $y = \cos(x)$ hat im Intervall $(0,2)$ genau eine Nullstelle x_0.

Def: $\pi := 2x_0$

Zur Begründung: Aus Aufgabe 5b/8. Ü folgt $\cos 2 < -\frac{1}{3} < 0$. Wegen $\cos(0) = 1 > 0$ und da cos auf $[0,2]$ stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz in $(0,2)$ eine Nullstelle des cosinus. Dass es nur eine gibt, folgt aus der strengen

Monotonie des cos im Intervall $[0,2]$. Die erhält man mit $\cos x_2 - \cos x_1 = -2 \sin \frac{x_1+x_2}{2} \sin \frac{x_2-x_1}{2}$ (9.3, (11)) und mit $\sin(x) \geq \frac{x}{3}$, $0 \leq x \leq 2$ (15a) (8.Ü).

Folgerungen:

$\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $e^{i\pi k} = (-1)^k$ $(k \in \mathbb{Z})$, $e^{i\frac{\pi}{2}(2k+1)} = i(-1)^k$ $(k \in \mathbb{Z})$,

$\cos k\pi = (-1)^k$ $(k \in \mathbb{Z})$, $\sin \frac{\pi}{2}(2k+1) = (-1)^k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Satz 2 1) $e^{z+2\pi i} = e^z$, $z \in \mathbb{C}$

2) sin, cos sind 2π-periodisch

Satz 3 (selbst/Ü)

$e^z = 1 \iff z = 2k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Verwenden Sie Satz 3, um alle Nullstellen der komplexen Funktionen sin, cos, sinh, cosh zu berechnen, also die Gleichungen

$\sin(z) = 0$, $\cos(z) = 0$, $\sinh(z) = 0$, $\cosh(z) = 0$

zu lösen.