13. Kapitel Grundlagen der Differential- und Integralrechnung (DR) (IR)

13.1 Das bestimmte Integral

$\int_a^b f(x)\,dx$ für eine auf dem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[a,b]$ definierte beschränkte Funktion f.

Eine Zerlegung Z von $[a,b]$ ist eine Punktmenge $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ mit $a = x_0$, $x_j < x_{j+1}$, $x_n = b$.

Beispiele: 1) $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$, $k = 0,1,\dots,n$

2) $(0<a<b)$: $x_k = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}}$, $k=0,1,\dots,n$

$\|Z\| := \max\{x_k - x_{k-1} \mid k = 1,\dots,n\}$ heißt Feinheit der Zerlegung Z.

Bezeichne mit I_k das k-te Teilintervall von Z: $I_k = \{x \mid x_{k-1} \le x \le x_k\}$, $k = 1,2,\dots,n$. Setze:

$m_k := \inf\{f(x) \mid x \in I_k\}$, $M_k := \sup\{f(x) \mid x \in I_k\}$, $\xi_k \in I_k$.

Die Ausdrücke $\omega(f,Z) := \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$, $\sigma(f,Z) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$, $\Omega(f,Z) := \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$ heißen Riemannsche Unter-/Zwischen-/Obersumme zur Zerlegung Z. Es gilt

$$\omega(f,Z) \le \sigma(f,Z) \le \Omega(f,Z).$$

Für irgend zwei Zerlegungen $Z, \tilde{Z}$ gilt stets

$$\omega(f,Z) \le \Omega(f,\tilde{Z}).$$

Gilt für Zerlegungen Z, Z': $Z \subset Z'$, so heißt Z' Verfeinerung von Z. Es gilt dann $\omega(f,Z) \le \omega(f,Z') \le \Omega(f,Z') \le \Omega(f,Z)$.

Def: Existiert $s \in \mathbb{R}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ derart, dass aus $\|Z\| < \delta$ bei beliebiger Wahl der Zwischenpunkte ξ_k

$$|\sigma(f, Z) - s| < \varepsilon \qquad \text{folgt, so}$$

schreiben wir $s = \lim\limits_{\|Z\| \to 0} \sigma(f, Z)$. Dieser Grenzwert wird durch $\underline{\int_a^b f(x)\,dx}$ bezeichnet und <u>das bestimmte Integral von f über $[a,b]$ genannt</u>. Wir nennen f dann <u>integrierbar über $[a,b]$</u>. Die Menge aller über $[a,b]$ integrierbaren beschränkten Funktionen f wird durch $\underline{I[a,b]}$ bezeichnet.

Es gilt

$$f \in I[a,b] \iff \text{zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es eine Zerlegung } Z \text{ von } [a,b] \text{ derart, dass } \Omega(f, Z) - \omega(f, Z) < \varepsilon \text{ gilt.}$$

<u>Beispiel. Bemerkungen.</u>

1) $[a,b] = [0,1]$ Für $f(x) := \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$

gilt für jede Zerlegung Z von $[0,1]$: $\omega(f, Z) = 0$,

$\Omega(f, Z) = 1$, so dass $f \notin I[0,1]$.

2) (in der Vorlesung nicht gebracht: einfach)

Für $f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq c \\ 1 & x = c \end{cases}$ $(c \in [a,b])$, $x \in [a,b]$

gilt $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Für jede Zerlegung Z gilt

$\omega(f,Z) = 0, \quad 0 < \Omega(f,Z) \leq 2\|Z\|$.

3) $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq c \\ 0 & x = c \end{cases} \quad a \leq x \leq b, \; c \in [a,b]$$

Es gilt $\int_a^b f(x)\,dx = b-a$. Für jede Zerlegung Z gelten $\Omega(f,Z) = b-a$, $\omega(f,Z) \geq b-a-2\|Z\|$, also $\Omega(f,Z) - \omega(f,Z) \leq 2\|Z\|$.

4) Für $f \in I[a,b]$ und $f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$, wird <u>der Flächeninhalt $I(G)$</u> von $G = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ durch $\int_a^b f(x)\,dx$ definiert.

<u>Satz 1</u>: a) $C^0[a,b] \subset I[a,b]$

b) Ist f auf $[a,b]$ monoton und beschränkt, so gilt $f \in I[a,b]$.

<u>Satz 2</u>: Für $f \in I[a,b]$ gilt
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

<u>Satz 3</u>: Für $f \in I[a,b]$ mit $0 < a < b$ und $q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ gilt
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} a(q-1) \sum_{k=1}^{n} f(aq^{k-1})\, q^{k-1}.$$

(Zu Satz 2, 3 vergleiche Beispiele 1, 2) zu Beginn dieses Abschnitts 13.1)

Beispiele zu Satz 2

$f(x) = c$ (konst), $a \le x \le b$

$f(x) = x$

$f(x) = e^{cx}$ (c konst, $\neq 0$)

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ (in Verbindung mit A26 / 4. Ü)

Beispiele zu Satz 3

$f(x) = x^p$ ($p \in \mathbb{N}$) A2 / 11. Ü

$f(x) = \frac{1}{x}$

13.2 Eigenschaften von $\int_a^b f(x)\,dx$

(I) (Vereinbarung): $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(II) $f, g \in I[a,b]$, $\lambda, \rho \in \mathbb{C}$: Dann gilt $\lambda f + \rho g \in I[a,b]$

und $\int_a^b (\lambda f(x) + \rho g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \rho \int_a^b g(x)\,dx$

(Linearität des Integrals)

Beispiele Für $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ wird definiert

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (\operatorname{Re} f)(x)\,dx + i \int_a^b (\operatorname{Im} f)(x)\,dx$. Hiermit:

$\int_a^b \cos x\,dx = \int_a^b \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\,dx = \sin b - \sin a$

$\int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b$

(III) Für $f \in I[a,b]$ und $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$ gilt

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx.$$

(IV) Aus $f, g \in I[a,b]$ und $f(x) \le g(x)$, $a \le x \le b$, folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Für $f \in I[a,b]$ gilt $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$.

(mit f ist auch $|f| \in I[a,b]$)

<u>Satz 4</u> Es seien $f_1, f_2 \in C^0[a,b]$ mit $f_1(x) \le f_2(x)$, $a \le x \le b$.

$G := \{(x,y) \mid f_1(x) \le y \le f_2(x),\ a \le x \le b\}$.

Es gilt $I(G) = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx$.

13.3 Der Mittelwertsatz der Integralrechnung (MWSIR)

<u>Satz 5</u> $f, g \in C^0[a,b]$, $f(x) \ge 0$ für $a \le x \le b$. Es gilt:

Es gibt ein $\xi \in (a,b)$ mit $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(\xi)\int_a^b f(x)\,dx$.

<u>Bemerkungen</u>: 1) Es genügt vorauszusetzen, dass $f(x)$ in $[a,b]$ das Vorzeichen nicht wechselt. (Begründung?)

2) Jedes $\xi \in (a,b)$ hat die Form $a + \vartheta(b-a)$ mit einer Zahl $\vartheta \in (0,1)$.

3) Der Fall $f = 1$: $\int_a^b g(x)\,dx = g(\xi)(b-a)$ wird häufig als Mittelwertsatz bezeichnet und unser Satz 5 als "verallgemeinerter Mittelwertsatz".