13.4 Die Ableitung

1) $f: (a,b) \to \mathbb{C}$ heißt <u>in $x_0 \in I$ diff'bar</u>, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(x_0+h) - f(x_0)) \left(= \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in I}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$

existiert. Dieser Grenzwert heißt <u>die erste Ableitung von f in x_0</u>. Er wird durch <u>$(Df)(x_0)$ oder $f'(x_0)$</u> bezeichnet.

f heißt <u>auf I diff'bar</u>, wenn f in jedem $x \in I$ diff'bar ist. In diesem Fall wird die Funktion $\begin{matrix} I \to \mathbb{C} \\ x \to f'(x) \end{matrix}$ auch

durch f' bezeichnet.

f ist auf I <u>j-mal diff'bar</u> ($j \in \mathbb{N}$), falls $f'(x), f''(x), \dots, f^{(j)}(x)$ für jedes $x \in I$ existieren.

$f^{(j)}(x) := (f^{(j-1)})'(x) \; (j = 1, 2, \dots)$

Die Existenz von $f'(x_0)$ bedeutet, dass der Graph von f in $(x_0, f(x_0))$ eine Tangente t_{f,x_0} besitzt mit der Steigung $f'(x_0)$:

$t_{f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \; x \in \mathbb{R}$.

$f'(x_0)$ ist <u>die Steigung der Kurve</u> $y = f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$.

2) <u>Satz 6 (Umformulierung obiger Definition)</u>

a) Ist f auf $(a,b) = I$ definiert und in $x_0 \in I$ diff'bar, dann gibt es eine in x_0 stetige Funktion f^*, für die

(<u>6.1</u>) $\quad f(x) - f(x_0) = f^*(x)(x - x_0), \; x \in I$, erfüllt ist.

Es gilt $f^*(x_0) = f'(x_0)$.

b) Gibt es eine in x_0 stetige Funktion f^*, die (<u>6.1</u>) erfüllt, dann ist f in x_0 diff'bar mit $f'(x_0) = f^*(x_0)$.

Bemerkungen - Beispiele

(1) Ist f in x_0 diff'bar, so ist f in x_0 stetig.

(2) $f(x) = |x|$ ist in 0 stetig aber nicht diff'bar.

(3) $f(x) = x^n$, $n = 0, 1$: $f'(x) = nx^{n-1}$.

(4) $f(x) = e^{cx}$ ($c \in \mathbb{C}$, konst), $f'(x) = ce^{cx}$.

13.5 Ableitungsregeln

Satz 7 $f, g : (a,b) \to \mathbb{C}$ seien in $x_0 \in (a,b)$ diff'bar; $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann sind $\alpha f + \beta g$, fg und, falls $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ in x_0 diff'bar, und man hat:

(1) $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$

(2) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$

mit dem Spezialfall: $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Beispiele:

zu (1): $f(x) = \cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ mit Beispiel (4) oben:

$f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x, \ldots$

zu (2): Mit (3) oben als Induktionsanfang sieht man für $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$: $f'(x) = nx^{n-1}$ mittels vollständiger Induktion.

zu (3): Es gilt für $f(x) = x^n$: $f'(x) = nx^{n-1}$ für $n \in \mathbb{Z}$

Satz 8 (Kettenregel)

Es sei f auf $I=(a,b)$ und g auf $f(I)$ definiert. Es sei $x_0\in I$ derart, dass $f(x_0)$ innerer Punkt von $f(I)$ ist. Ist f in x_0 und g in $f(x_0)$ diff'bar, so ist $g\circ f$ in x_0 diff'bar mit $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$.

Beispiel

$$h(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$$

ist in jedem $x\in\mathbb{R}$ diff'bar:

$$h'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$$

h' ist in 0 unstetig.

Def: $n\in\mathbb{N}$: $h\in C^n(I)$ (n-mal auf I stetig diff'bar)

$\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$ $h^{(j)}$, $j=0,1,\dots,n$ existieren und sind auf I stetig.

$$C^\infty(I):=\bigcap_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} C^n(I)$$: Beispiele: $f(x)=e^x$, $\cos x$, $\sin x$, $\sinh(x)$ ...

Satz 9 (Ableitung der Umkehrfunktion)

$x=f(y)$ sei für $y\in I$ definiert, stetig, bijektiv und in $y_0\in I$ diff'bar mit $f'(y_0)\neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $g: f(I)\to I$, $y=g(x)$, in $x_0=f(y_0)$ diff'bar mit

$$g'(x_0)=\frac{1}{f'(g(x_0))}\quad\left(g'(f(y_0))=\frac{1}{f'(y_0)}\right).$$

Beispiele: 1) $f(x) = \ln|x| \quad (x \neq 0)$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

2) Es sei f diff'bar auf I und $f(x) \neq 0$, $x \in I$.

Für $h(x) := \ln|f(x)|$ gilt $h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (x \in I)$.

3) $h(x) = |x|^\alpha \quad (x \neq 0, \alpha \in \mathbb{R})$

$$h'(x) = \operatorname{sign}(x)\, \alpha\, |x|^{\alpha-1} \quad \left(\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \right)$$

$\alpha = \frac{1}{2}$, $x > 0$: $h(x) = \sqrt{x}$, $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

13.6 Extremwerte. MWSDR (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Def: $I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall.

$f: I \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in I$

a) ein lokales Maximum, falls es eine Umgebung $U \subset I$ von x_0 gibt mit $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in U$

b) ein Maximum, falls $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in I$ gilt

c) ein lokales Minimum (Minimum), falls $-f$ in x_0 ein lokales Maximum (Maximum) hat.

d) Ein Maximum oder Minimum ist ein Extremum (Extremwert) von f.

Satz 10 $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in (a,b)$ einen lokalen Extremwert, f sei in x_0 diff'bar. Dann gilt: $f'(x_0) = 0$.

Bemerkungen: 1) Um ein Max oder Min einer Funktion f auf $[a,b]$ zu bestimmen, sind drei Arten von Punkten zu betrachten:

(1) Die Punkte $x \in (a,b)$ mit $f'(x) = 0$.

(2) Die Randpunkte a und b.

(3) Die Punkte $x \in (a,b)$, in denen f nicht diff'bar ist –