2) Die Umkehrung von Satz 10 ist i.a. falsch:
Für $f(x) = x^3$ auf $-1 \leq x \leq 1$ gilt $f'(0) = 0$. f hat in 0 aber weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum.

<u>Satz 11</u> Es sei f auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) diff'bar. Es gelte $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

<u>Satz 12</u> g, f seien auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) diff'bar. Dann gibt es eine Zahl $\vartheta \in (0,1)$ mit

<u>MWSDR</u> $(f(b) - f(a))g'(a + \vartheta(b-a)) = (g(b) - g(a))f'(a + \vartheta(b-a))$

<u>Satz 13</u> (Satz 12 mit $g(x) = x$)

M<u>WSDR</u> f sei auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) diff'bar. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$.

<u>Bemerkung</u>: Es seien x und $x+h \in [a,b]$. Dann gilt mit einem ξ zwischen x und $x+h$: $f(x+h) = f(x) + f'(\xi)\, h$.

<u>Folgerung: Satz 14</u>: Es sei f auf dem Intervall I definiert und dort diff'bar. Es gelten:

a) $f' > 0$ auf I $\Rightarrow$ $f \uparrow$ (streng)
$f' < 0$ auf I $\Rightarrow$ $f \downarrow$ (streng)

b) $f' \geq 0$ auf I $\Leftrightarrow$ $f \uparrow$
$f' \leq 0$ auf I $\Leftrightarrow$ $f \downarrow$

c) $f' = 0$ auf I $\Leftrightarrow$ $f = \text{Const}$ auf I.

Beispiele:

1) f, g seien auf $[a,b]$ diff'bar. Aus $f'(x) \le g'(x)$, $a \le x \le b$, folgt: $f(x) - f(a) \le g(x) - g(a)$, $a \le x \le b$.

2) Es sei $c \in \mathbb{C}$ gegeben.
Jede diff'bare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die
$$f'(x) = c\, f(x), \; x \in \mathbb{R}, \text{ erfüllt,}$$
hat die Form $f(x) = \alpha e^{cx}$, $x \in \mathbb{R}$, mit einer Konstanten α.

13.7 Der Hauptsatz der Differential- Integralrechnung

I sei Intervall in $\mathbb{R}$ und $f: I \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion.

$F: I \to \mathbb{R}$ heißt <u>Stammfunktion von f</u>, wenn F auf I diff'bar ist und auf I die Gleichung $F' = f$ erfüllt.

<u>Satz 15</u> (Hauptsatz)

Es seien $f \in C[a,b]$ und $c \in [a,b]$. Dann gelten:

1) $F_c : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F_c(x) := \int_c^x f(t)\,dt$ ist Stammfunktion von f.

2) Ist F eine Stammfunktion von f, so gibt es eine Konstante k mit $F(x) = F_c(x) + k$, $x \in [a,b]$

3) Ist F Stammfunktion von f, so gilt
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \left(=: F(x)\Big|_{x=a}^{b} \right).$$

Die Menge

$\{F : I \to \mathbb{R} \mid F \text{ ist Stammfunktion von } f\}$

$= \{F_c + k \mid k \text{ ist beliebige Konstante}\}$ heißt das unbestimmte Integral von f, was häufig durch $\int f(x)\,dx$ bezeichnet wird. Wir schreiben hierfür $\int^x f(t)\,dt$.

13.8 Integrationsregeln (Partielle Integration. Substitutionsregel)

Wegen $\int_c^x f(t)\,dt = F(x) \iff F'(x) = f(x)\,,\quad x \in I$

erhält man aus jeder Ableitung (aus jeder Ableitungsregel) ein Integral (eine Integrationsregel).

Satz 16 (Partielle Integration) ($\Leftarrow$ Produktregel)

Es seien $u, v \in C^1[a,b]$. Es gilt:

$$\int_a^x u(t)v'(t)\,dt = u(t)v(t)\Big|_{t=a}^{x} - \int_a^x u'(t)v(t)\,dt,\ a \le x \le b$$

Beispiel:

$$\int_a^x f(t)\,dt = xf(x) - af(a) - \int_a^x t f'(t)\,dt$$

hieraus:

$$\int_a^x \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right) \underbrace{-\frac{1}{2}\left(a\sqrt{1-a^2} + \arcsin a\right)}_{+\,\text{const.}}$$

$$\left(\int^x \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right) \right)$$

Satz 17 (Substitutionsregel) ($\Leftarrow$ Kettenregel)

$f : [c,d] \to \mathbb{R}$ sei stetig, $g : [a,b] \to [c,d]$ sei stetig diff'bar. Es gilt:

$$\int_{g(a)}^{g(x)} f(\tau)\,d\tau = \int_a^x f(g(t))\,g'(t)\,dt,\ a \le x \le b.$$

Beispiel: $\displaystyle\int_a^x \frac{g'(t)}{g(t)}\,dt = \ln\left|\frac{g(x)}{g(a)}\right|$, $\displaystyle\int^x \tan t\,dt = -\ln|\cos(x)|$.