Bemerkung: Es sei $x_0 > 0$. Es soll die 200. Ableitung von $\ln(x)$ an der Stelle x_0 berechnet werden.

Entwickle $f(x) = \ln(x)$ um x_0: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$. Es gilt

$$a_{200} = \frac{1}{200!} f^{(200)}(x_0).$$

$$\ln(x) = \ln(x_0 + x - x_0) = \ln x_0 \left(1 + \frac{x-x_0}{x_0}\right) = \ln(x_0) + \ln\left(1 + \frac{x-x_0}{x_0}\right)$$

$$\overset{\text{Beispiel}}{\underset{\text{vorher}}{=}} \ln(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^{k+1} \frac{1}{x_0^k} (x-x_0)^k$$

gültig für $-1 < \frac{x-x_0}{x_0} \le 1 \iff 0 < x \le 2x_0$.

---

15. Kapitel Unbestimmte Ausdrücke. Die Regeln von de L'Hospital

15.1 Die Ausdrücke $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Satz: Es seien f, g auf (a,b) definierte und auf (a,b) differenzierbare Funktionen. Für $a < x < b$ gelte: $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$. Es sei erfüllt

1. Fall: $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ für $x \to b-$ ($x \to b$ und $x < b$)
2. Fall: $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ für $x \to b^-$

Für beide Fälle gilt:
Existiert $\lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ($\in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$), so existiert auch $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, und es ist $l = L$.

[analog für $x \to a+$ ($x \to a$ und $x > a$), $a = -\infty$ und $b = +\infty$ sind zugelassen].

<u>Bemerkung</u>: Die anderen unbestimmten Ausdrücke

$\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ lassen sich auf

$\frac{0}{0}$ (1. Fall oben) und $\frac{\infty}{\infty}$ (2. Fall oben) zurückführen.

Unter $\infty \cdot 0$ ist gemeint: $\lim\limits_{x \to b} f(x) g(x)$, wenn $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \infty$

und $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$ gegeben sind. Analog sind die anderen

Ausdrücke zu verstehen.

<u>Beispiele</u>: 1) ($\alpha > 0$) $\lim\limits_{x \to 0+} x^{(x^\alpha)} = 1$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}} = 1$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1$

4) $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0$

---

16. Kapitel Uneigentliche Integrale

16.1 Definitionen

1. Es sei f auf $[a,b)$ definiert ($b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$) und für jedes $\beta \in (a,b)$ über $[a,\beta]$ integrierbar:

(1) $\int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim\limits_{\beta \to b-} \int\limits_a^\beta f(x)\,dx$, falls dieser Grenzwert existiert.

2. Es sei f auf $(a,b]$ definiert ($a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$) und für jedes $\alpha \in (a,b)$ über $[\alpha,b]$ integrierbar:

(2) $\int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim\limits_{\alpha \to a+} \int\limits_\alpha^b f(x)\,dx$, falls dieser Grenzwert existiert.

3. Es sei f auf (a,b) definiert ($a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$) und für alle $\alpha, \beta \in (a,b)$ mit $\alpha < \beta$ über $[\alpha, \beta]$ integrierbar. Es sei $c \in (a,b)$ beliebig. Existieren die Integrale

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad (\underline{2}.\ \text{vorher}) \quad \text{und} \quad \int_c^b f(x)\,dx \quad (\underline{1}.),$$

so wird definiert:

$$\underline{(3)} \quad \int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

4. Es sei $a < c < b$, und f sei auf $[a,b]\setminus\{c\}$ definiert. Existieren die Integrale $\int_a^c f(x)\,dx$ ($\underline{1}.$) und $\int_c^b f(x)\,dx$ ($\underline{2}.$), so wird definiert:

$$\underline{(4)} \quad \int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Existieren oben in (1), (2), (3), (4) die Grenzwerte rechts, so sagen wir:

Das (uneigentliche) Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ <u>existiert</u> oder <u>konvergiert</u>. Andernfalls heißt $\int_a^b f(x)\,dx$ <u>divergent</u>.

16.2 <u>Beispiele</u>: 1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}$, $s > 1$. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ ist für $s \leq 1$ divergent.

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s}$, $s < 1$. Für $s \geq 1$ ist $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ divergent.

3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^s}$ ist für kein $s \in \mathbb{R}$ konvergent

4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$

5) $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$ ist divergent

6) $\int_{-1}^{+1} \ln|x|\,dx = -2$

16.3 Majoranten-, Minorantenkriterium. Absolute Konvergenz. Integralkriterium.

Satz 1 f, g seien für jedes $\beta \in (a,b)$ über $[a,\beta]$ integrabel. Es gelte auf $[a,b)$

$$0 \le f(x) \le g(x) \quad , x \in [a,b).$$

Dann folgen:

1) Aus der Konvergenz von $\int_a^b g(x)\,dx$ folgt die von $\int_a^b f(x)\,dx$.

2) Aus der Divergenz von $\int_a^b f(x)\,dx$ folgt die Divergenz von $\int_a^b g(x)\,dx$.

Beispiele:

1) $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ ist konvergent, da $0 \le e^{-x^2} \le e^{-x}$ für $x \geq 1$ gilt.
(oder da $0 < e^{-x^2} \le x^{-2}$ für $x \geq 1$ gilt)

2) Gammafunktion $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$ ist für $x > 0$ konvergent (also definiert).

Denn: Betrachte: $J_1 = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\,dt$ und $J_2 = \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$

J_1 konvergiert wegen $0 \le t^{x-1} e^{-t} \le t^{x-1}$ genau für $x > 0$ nach 16.2 Beispiel 2)

J_2 konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ wegen $0 < t^{x-1} e^{-t} \le k!\, t^{-2}$ für genügend großes $k \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Es gilt $\Gamma(n+1) = n!$, $n = 0, 1, \dots$
(mit Aufgabe 5, 15. Ü)

Definition: Ist $\int_a^b |f(x)|\,dx$ konvergent, so heißt $\int_a^b f(x)\,dx$ absolut konvergent.

Satz 2: Ist $\int_a^b f(x)\,dx$ absolut konvergent, so ist $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent.

Aber: Aus der Konvergenz von $\int_a^b f(x)\,dx$ folgt nicht die Konvergenz von $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Beispiel: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ existiert.

Vorbemerkung: $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ existiert, da wegen

$$0 \le \frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \qquad \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx \text{ absolut konvergent ist.}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx}_{\checkmark} + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Zu $\lim_{\beta\to\infty} \int_1^\beta \frac{\sin x}{x}\,dx$: $\int_1^\beta \frac{\sin x}{x}\,dx \overset{\text{partiell integrieren}}{=} -\frac{1}{x}\cos x\Big|_1^\beta - \int_1^\beta \frac{\cos x}{x^2}\,dx$

Also existiert (mit der Vorbemerkung): $\lim_{\beta\to\infty} \int_1^\beta \frac{\sin x}{x}\,dx$.

$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ konvergiert nicht

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\pi} \underbrace{\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,dx}_{=2}$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \to \infty \quad (n\to\infty).$$

Satz 3 (Integralkriterium)

Es sei $f \in C[1,\infty)$; $f(x) \geq 0$, $1 \leq x < \infty$; f monoton fallend.
Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ ist konvergent} \iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ ist konvergent.}$$

Das Ergebnis liest man ab aus:

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^{n} f(x)\,dx$$

Beispiele: 1) Für $f(t) = \frac{1}{t^s}$, $s > 1$, sind die Vor von Satz 3 erfüllt und $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^s}$ ist konvergent. Somit gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ ist für $s > 1$ konvergent. Ebenso folgt aus den Ergebnissen für $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^s}$, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ für $s \leq 1$ divergent ist.

Aus der Ungleichungskette oben folgt ($n \to \infty$):

$$\frac{1}{s-1} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} < \frac{s}{s-1} \qquad (s > 1)$$

2) Wendet man die Ungleichungen auf $f(t) = \frac{1}{t}$ an, so erhält man:

$$\ln(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \ln(n).$$