2.5 Ergänzungen

1) Es sei I eine Menge. Jedem $j \in I$ wird eine Menge A_j zugeordnet. $\{A_j \mid j \in I\}$ heißt Mengenfamilie.

$$\bigcup_{j\in I} A_j := \{x \mid \exists_{j \in I}\, x \in A_j\},\quad \bigcap_{j\in I} A_j := \{x \mid \forall_{j\in I}\, x \in A_j\}.$$

Satz 2 (de Morgansche Regeln)
Es sei $\{A_j \mid j \in I\}$ eine Mengenfamilie und M eine Menge mit $A_j \subset M$ für jeden Index $j \in I$. Es gelten:

$$C_M\Big(\bigcup_{j\in I} A_j\Big) = \bigcap_{j\in I} C_M A_j,\quad C_M\Big(\bigcap_{j\in I} A_j\Big) = \bigcup_{j\in I} C_M A_j.$$

2) Zwei Mengen M, N mit $M \cap N = \emptyset$ heißen disjunkt.

3) Sind $A_1, A_2, \dots, A_n$ Mengen, so wird die Menge der geordneten n-Tupel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ $(a_j \in A_j, j = 1, \dots, n)$ durch $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ bezeichnet und das kartesische Produkt der Mengen $A_1, A_2, \dots, A_n$ genannt.
Im Fall $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ schreibt man für $A \times \dots \times A$ A^n. Beispiel: $A = \mathbb{R}$ $\mathbb{R}^2$ Ebene, $\mathbb{R}^3$ Raum.

Kapitel 3 Funktionen (Abbildungen)

3.1 Bezeichnungen. Definitionen

1) X, Y seien zwei nichtleere Mengen. Eine Vorschrift f, durch die jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zugeordnet wird, heißt Funktion (Abbildung) von X nach Y. Geschrieben:

$f: X \to Y$, $y = f(x)$. x heißt unabhängige, y abhängige Variable. X ist der Definitionsbereich von f (wir werden hierfür auch $D(f)$ schreiben), Y heißt Wertebereich von f.

2) Für $A \subset X$ heißt $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$ das <u>Bild von A unter f</u>,
$f(X)$ heißt <u>Bildbereich von f</u> (das ist die Menge der Funktionswerte).
Ist $B \subset Y$, so heißt $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ das <u>Urbild von B</u> unter f.

3) Der <u>Graph</u> einer Funktion $f: X \to Y$ ist die Menge
$$\operatorname{graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \ (\subset X \times Y).$$
Es gilt $\forall_{(x,y) \in \operatorname{graph}(f)} \ (x,y') \in \operatorname{graph}(f) \Rightarrow y = y'$.

4) Die durch $id_X(x) := x$ für alle $x \in X$ definierte Funktion $id_X : X \to X$ heißt die <u>Identität von X</u>.

5) Es sei $A \subset X$. Die Funktion $\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$,
$\chi_A : X \to \{0,1\}$ heißt <u>die charakteristische Funktion von A</u>.

<u>3.2 Surjektiv, injektiv, bijektiv</u>

Die Funktion $f: X \to Y$ heißt

<u>surjektiv</u>, wenn jedes $y \in Y$ mindestens ein Urbild hat (wenn also $f(X) = Y$ gilt)

heißt

<u>injektiv (eineindeutig)</u>, wenn jedes Bild $f(x)$ nur ein Urbild besitzt (wenn also aus $x_1 \neq x_2$ folgt: $f(x_1) \neq f(x_2)$)

heißt

<u>bijektiv</u>, wenn f surjektiv und injektiv ist, wenn es also zu jedem $y \in Y$ genau ein Urbild $x \in X$ gibt.

Ist f bijektiv, so ist die Vorschrift, die jedem $y \in Y$ die Lösung x der Gleichung $y = f(x)$ zuordnet, eine Funktion, die zu f <u>inverse Funktion f^{-1}</u>:

$$f^{-1}(y) = x \;:\Longleftrightarrow\; y = f(x) \qquad (x \in X, y \in Y)$$

$$f^{-1}: Y \to X.$$

<u>3.3</u> <u>Hintereinanderausführen / Komposition von Abbildungen</u>

X, Y, Z seien Mengen und $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ Funktionen. Dann wird durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)),\; x \in X$$

<u>die Abbildung $g \circ f: X \to Z$</u> definiert.

- Es gelten mit $f: X \to Y$: $f \circ id_X = f$, $id_Y \circ f = f$.
- ~~Für~~ zwei Funktionen f, g, für die $f \circ g$ und $g \circ f$ bildbar sind, gilt i.a. $f \circ g \neq g \circ f$.

<u>Satz 1</u> X, Y, Z, U seien Mengen und $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to U$ Funktionen. Dann sind die Funktionen $(h \circ g) \circ f$ und $h \circ (g \circ f)$ Funktionen von X nach U.
Es gilt: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

<u>3.4</u> <u>Die inverse Funktion</u> (siehe oben 3.2)

<u>Satz 2</u> a) Ist $f: X \to Y$ bijektiv, so ist f^{-1} die durch $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$ eindeutig festgelegte Abbildung $g: Y \to X$.

b) Gelten für die Funktionen $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ $\quad g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$,

so sind f und g bijektiv.

Bemerkung (Ü) Ist f bijektiv, so gilt $(f^{-1})^{-1} = f$.

Satz 3 Sind $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ bijektiv, so ist $g \circ f: X \to Z$ bijektiv. Es gilt
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Beispiel: Definiere $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ durch
$\sigma(2k) := k$, $k = 1, 2, \dots$, und $\sigma(2k+1) = -k$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Ü: Zeige, dass σ bijektiv ist. Finde eine Darstellung für $\sigma^{-1}: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$. Prüfe damit nach:
$\sigma \circ \sigma^{-1} = id_{\mathbb{Z}}$ und $\sigma^{-1} \circ \sigma = id_{\mathbb{N}}$ und auch

$(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$.