4.1 Addition und Multiplikation

Die Addition: $+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad : (x,y) \to x+y$

hat die folgenden Eigenschaften: Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gelten

$x+y = y+x$; $(x+y)+z = x+(y+z)$;

es gibt eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$ mit $x+0 = x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$;

zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $-x \in \mathbb{R}$ mit $x+(-x) = 0$.

Die Multiplikation: $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad : (x,y) \to xy$

wird durch die folgenden Regeln festgelegt: Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gelten

$xy = yx$; $(xy)z = x(yz)$; es gibt eine Zahl $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, mit $x1 = x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$; zu jedem $x \neq 0$ gibt es ein $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ mit $x\frac{1}{x} = 1$.

Es gilt das Distributivgesetz: $x(y+z) = xy + xz$

Bemerkung Aus diesen Regeln können alle Regeln über das Rechnen mit $+, \cdot, -$, Brüchen hergeleitet werden.

4.2 Anordnungsaxiome ($<, >, \leq, \geq$, Ungleichungen)

Es gibt eine Teilmenge $P \subset \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

O1) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ trifft genau eine der drei Möglichkeiten zu: $x \in P$, $-x \in P$, $x = 0$

O2) $x, y \in P \Rightarrow x+y \in P$

O3) $x, y \in P \Rightarrow xy \in P$

Die Elemente aus P heißen positiv: Für $x \in P$ wird $x > 0$ geschrieben (oder $0 < x$) ($>$ größer als, $<$ kleiner als)

$x < 0 :\Leftrightarrow -x > 0$ (x negativ)

$x > y :\Leftrightarrow x - y > 0$

$x \geq y :\Leftrightarrow x > y$ oder $x = y$

Aus O1, O2, O3 mit den Bezeichnungen $>, <, \geq, \leq$ können alle Regeln, die das Rechnen mit Ungleichungen betreffen, hergeleitet werden. Einige sind in Satz 1 zusammengestellt:

<u>Satz 1</u>

(1) Aus $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a > b) \wedge (b > c)$ folgt $a > c$

(2) Aus $a > b$ und $c \in \mathbb{R}$ folgt $a + c > b + c$

(3) Aus $a > b$ $\begin{cases} \text{und } c > 0 \\ \text{und } c < 0 \end{cases}$ folgt $\begin{cases} ac > bc \\ ac < bc \end{cases}$

(4) Aus $a \leq b$ und $c \leq d$ folgt $a + c \leq b + d$

(5) Gilt für zwei Zahlen a, b und für jede positive Zahl $\varepsilon > 0$ $a \leq b + \varepsilon$, so folgt $a \leq b$.

<u>Beispiele</u> 1) $\{x \mid x + \frac{1}{x} \geq 2\} = \{x \mid x > 0\}$

2) $\forall_{x>0, y>0} \; (x < y) \Longleftrightarrow (x^2 < y^2)$

3) $\forall_{x, y \in \mathbb{R}} \; (x < y) \Rightarrow \left(x < \frac{x+y}{2} < y\right)$

4.3 Der Betrag einer reellen Zahl

$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow |x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x \leq 0 \end{cases} = \max(x, -x)$$

<u>Satz 2</u> x, y sind beliebige reelle Zahlen. Es gelten:

(1) $x \neq 0 \Longleftrightarrow |x| > 0$

(2) $-|x| \leq x \leq |x|$

(3) $|-x| = |x|$

(4) $|x - y| = |y - x|$

(5) Es sei $a > 0$: $\{x \mid -a \leq x \leq a\} = \{x \mid |x| \leq a\}$.

Bemerkung zu (5)

Es seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ fest. Die Menge

$\{x \mid |x - x_0| < a\} = \{x \mid x_0 - a < x < x_0 + a\}$

heißt a-Umgebung von x_0.

Satz 3 Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten:

(1) $|xy| = |x||y|$ $\quad (\Rightarrow |x|^2 = x^2, \ |x| = \sqrt{x^2})$

$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$

(2) $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)

(3) $(|x| \leq |y|) \iff (x^2 \leq y^2)$

Beispiel $\quad \{x \mid \left|\frac{x+4}{x+1}\right| \leq 2\} = \{x \mid |x| \geq 2\}$

Satz 4 (Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel: GAM-Ungleichung)

(1) Für $x \geq 0, y \geq 0$ gilt $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x+y)$

(2) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

4.4 Das Vollständigkeitsaxiom

1. Beschränkte Mengen

1) Es sei $M \subset \mathbb{R}$.

$\exists_{S \in \mathbb{R}} \forall_{x \in M} \ x \leq S$, so heißt M nach oben beschränkt, S ist eine obere Schranke von M.

$\exists_{s \in \mathbb{R}} \forall_{x \in M} \ s \leq x$, so heißt M nach unten beschränkt, s ist eine untere Schranke von M.

Ist M nach unten und nach oben beschränkt, so heißt M beschränkt.

Beispiel: $M = \{x \mid x < 0\}$ ist nach oben aber nicht nach unten beschränkt.

<u>Maximum</u> / <u>Minimum</u> einer Menge $M \subset \mathbb{R}$:

$$x = \max(M) :\Longleftrightarrow (x \in M) \wedge (\forall_{y \in M}\; y \leq x)$$

$$\tilde{x} = \min(M) :\Longleftrightarrow (\tilde{x} \in M) \wedge (\forall_{y \in M}\; \tilde{x} \leq y)$$

<u>Beispiel</u>: $M = \{x \mid x < 0\}$ besitzt kein Maximum.

<u>Satz 5</u> $M, N \subset \mathbb{R}$ seien Mengen, die ein Maximum und ein Minimum besitzen. Es gelten:

a) $M \subset N \Rightarrow \max(M) \leq \max(N)$ und $\min(N) \leq \min(M)$

b) $\max(M \cup N) = \max\{\max(M), \max(N)\}$
$\min(M \cup N) = \min\{\min(M), \min(N)\}$

c) $\min(M) = -\max(-M)$
Hierbei ist $-M := \{x \mid -x \in M\}$.

2) Es sei $M \subset \mathbb{R}$
$\Gamma \in \mathbb{R}$ heißt <u>Supremum von M</u>: $\Gamma = \sup(M)$, wenn Γ eine kleinste obere Schranke von M ist: also:

$\Gamma = \sup(M) :\Longleftrightarrow$ 1. $x \leq \Gamma$ für alle $x \in M$
2. Aus $x \leq S$ für alle $x \in M$ folgt $\Gamma \leq S$.

$\gamma \in \mathbb{R}$ heißt <u>Infimum von M</u>: $\gamma = \inf(M)$, wenn γ eine größte untere Schranke von M ist: also:

$\gamma = \inf(M) :\Longleftrightarrow$ 1. $\gamma \leq x$ für alle $x \in M$
2. Aus $s \leq x$ für alle $x \in M$ folgt $s \leq \gamma$.

Satz 6 $\inf(M) = -\sup(-M)$

Satz 7 $\Gamma = \sup(M) \iff$ 1. $x \leq \Gamma$ für alle $x \in M$
2. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x \in M$ mit $\Gamma - \varepsilon < x$.

(Formuliere Satz 7 für $\inf(M)$)

Bemerkungen: 1) Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt höchstens ein Supremum.

2) Existiert $\max(M)$, so gilt $\max(M) = \sup(M)$.

3) Ist M nach oben (unten) unbeschränkt ("), so schreibt man auch $\sup(M) = \infty$ ($\inf(M) = -\infty$), was symbolisch zu verstehen ist (∞ ist keine Zahl!).

$$\sup(M) = \infty \iff \forall_{K \in \mathbb{R}} \exists_{x \in M} K < x .$$

Beispiel: $M = \{\frac{1}{x} \mid x > 0\}$ ist nach oben nicht beschränkt.

2. Das Vollständigkeitsaxiom

(V) Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$, besitzt ein Supremum: Es gibt $\Gamma \in \mathbb{R}$ mit $\Gamma = \sup(M)$.

Satz 8 In $\mathbb{Q}$ gilt (V) nicht:
Die Menge $M := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ und } x^2 < 2\}$ ist nichtleer und beschränkt. Es ist $\sup(M) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

4.5 Es sei $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \to f(x)$ gegeben.

1) f heißt streng monoton wachsend (fallend) (wir schreiben $f\uparrow$ bzw. $f\downarrow$ (streng)), falls aus $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$
($f(x_1) > f(x_2)$)

Folgt aus $x_1 < x_2$ lediglich $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$), so heißt f monoton wachsend (fallend).

Überlegen Sie sich:

A1 $\quad f\uparrow \iff -f\downarrow$

A2 $\quad f\uparrow \iff (f(x_1) - f(x_2))(x_1 - x_2) > 0$
$\iff \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ $\quad$ für alle $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$

A3 $\quad f\uparrow \Rightarrow f$ ist injektiv

A4 $\quad$ Es sei f bijektiv. Dann gilt:
$$f\uparrow \iff f^{-1}\uparrow$$

2) Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn die Bildmenge $f(I)$ beschränkt ist, wenn es also Zahlen S_1, S_2 gibt, für die
$$S_1 \leq f(x) \leq S_2 \quad \text{für alle } x \in I$$
erfüllt sind.