4.6 Einige Folgerungen aus dem Vollständigkeitsaxiom (V), (4.4, 2. (S.14)).

Satz 9 $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt.

Satz 10 (Satz von Archimedes) ($\Leftrightarrow$ Satz 9)
Zu jeder positiven Zahl $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ mit: $\forall_{\substack{n \geq n_0 \\ n \in \mathbb{N}}} \; n > x$.

Satz 11 ($\Leftrightarrow$ Satz 10)
Zu jeder positiven Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ mit: $\forall_{\substack{n \geq n_0 \\ n \in \mathbb{N}}} \; \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Satz 12
Gilt für reelle Zahlen x, y: $1 < y - x$, so gibt eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit $x < k < y$.

Satz 13 ("Die rationalen Zahlen liegen in $\mathbb{R}$ dicht")
Zu zwei reellen Zahlen x, y mit $x < y$ gibt es eine rationale Zahl r mit $x < r < y$.

Kapitel 5 $\mathbb{N}$, Vollständige Induktion (VI), Permutationen, Kombinationen

5.1 $M \subset \mathbb{R}$ heißt *induktive Menge*, falls (A): $1 \in M$ und (B): Aus $x \in M$ folgt $x+1 \in M$: erfüllt sind.

Bemerkungen: 1) $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ sind induktive Mengen
2) Der Durchschnitt induktiver Mengen ist eine induktive Menge

Definition (von $\mathbb{N}$)

$\mathbb{N}$ ist der Durchschnitt aller induktiver Teilmengen von $\mathbb{R}$.
(als solcher ist $\mathbb{N}$ die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$: es gilt $\mathbb{N} \subset M$ für jede induktive Menge $M \subset \mathbb{R}$)

5.2

Satz 1 (Induktionssatz)

Für $M \subset \mathbb{N}$ seien erfüllt: (A) $1 \in M$
(B) Aus $n \in M$ folgt $n+1 \in M$.

Dann gilt $M = \mathbb{N}$.

Bemerkung: Verschiebt man den Anfang 1, so erhält man: Für $M \subset \mathbb{Z}$ seien erfüllt:
(A) $n_0 \in M$ und (B) Aus $n \in M$ und $n \geq n_0$ folgt $n+1 \in M$.

Dann gilt $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\} \subset M$.

5.3 Definition durch Induktion

Die Größe $G(n)$ soll für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert werden: Definiere (A) $G(1)$ und
definiere (B) $G(n+1)$ unter der Maßgabe, dass $G(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ schon definiert ist.

Dann ist gemäß Satz 1 $G(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.

Beispiele 1) $\sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$. (A) $\sum_{k=1}^{1} a_k := a_1$

(B) $\sum_{k=1}^{n+1} a_k := \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}$.

2) $\prod_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$. (A) $\prod_{k=1}^{1} a_k := a_1$

(B) $\prod_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) a_{n+1}$

Hierzu Beispiel $a_k = k$: $\prod_{k=1}^{n} k =: n!$ („n Fakultät")

(Zusatz: $0! := 1$)

5.4 Beweismethode: Vollständige Induktion (VI)

$A(n)$ soll für alle $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$, bewiesen werden:

(A) Induktionsanfang: Beweise $A(n_0)$.

(B) Induktionsschluss: Ind.voraussetzung: $A(n)$ sei für ein $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$, bewiesen

Ind. behauptung: $A(n+1)$

Dann ist nach der Bemerkung zu Satz 1 $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$, bewiesen.

Beispiele: 1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$

2. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind Zahlen $x_1, \dots, x_n$ mit: $\forall_{j \in \{1,2,\dots,n\}} x_j \geq -1$ und alle x_j haben dasselbe Vorzeichen: gegeben. Es gilt dann: $\prod_{j=1}^{n} (1+x_j) \geq 1 + \sum_{j=1}^{n} x_j$

3. Setzt man in 2. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x \geq -1$, so erhält man die Bernoullische Ungleichung:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

4. Satz 2 (Die Anzahl der Permutationen aus n Elementen)

Aus n verschiedenen Elementen $a_1, a_2, \dots, a_n$ lassen sich $n!$ n-Tupel so bilden, dass in jedem n-Tupel jedes der gegebenen Elemente vorkommt.
(Es gilt $n!$ bijektive Abbildungen von $\{1,2,\dots,n\}$ nach $\{1,2,\dots,n\}$.)

5. Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{k}$ ("α über k"):

$$\alpha \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}: \quad \binom{\alpha}{k} := \frac{1}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} (\alpha - l) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

$$\binom{\alpha}{0} := 1$$

Es gilt: $\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}$.

Speziell für $\alpha = n \in \mathbb{N}$ hat man:

$$\binom{n}{k} = 0, \quad k > n, \quad n, k \in \mathbb{N}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad (n \geq k)$$

insbesondere auch: $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$.

Satz 3

Es seien $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Die Anzahl der k elementigen Teilmenge einer Menge, die n Elemente enthält, ist $\binom{n}{k}$.

6. Satz 4 (Binomischer Lehrsatz) (4. Übungsblatt)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k; \quad x, y \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

mit den Spezialfällen:

$x=-y=1,\ n\in\mathbb{N}$ $\quad 0=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$

$x=y=1,\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}:\quad 2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

Kapitel 6 Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

6.1 Eine komplexe Zahl wird in der Form $z=x+iy$ dargestellt. Hierbei sind $x,y\in\mathbb{R}$ der Zahl z eindeutig zugeordnet. x heißt Realteil, y Imaginärteil von z: $\mathrm{Re}(z):=x$, $\mathrm{Im}(z):=y$. i ist die imaginäre Einheit, für die $i^2=-1$ gilt.

Komplexe Zahlen $z=x+iy$, $w=u+iv$ werden addiert und multipliziert gemäß:

(A) $z+w = (x+u)+i(y+v)$

(M) $zw = xu-yv+i(yu+xv)$

Es gelten alle Regeln aus 4.1
Das neutrale Element für (A) ist $z=0\ (=0+i0)$
und für (M) $z=1\ (=1+i0)$
Die Menge der komplexen Zahlen wird durch $\mathbb{C}$ bezeichnet. Es gilt $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$:
$\mathbb{R}=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(z)=0\}$. Sind $z,w\in\mathbb{R}$, so liefern (A), (M) oben die Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$.

$\bar{z}:=x-iy$ heißt die zu z konjugiert komplexe Zahl

Es gelten: $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

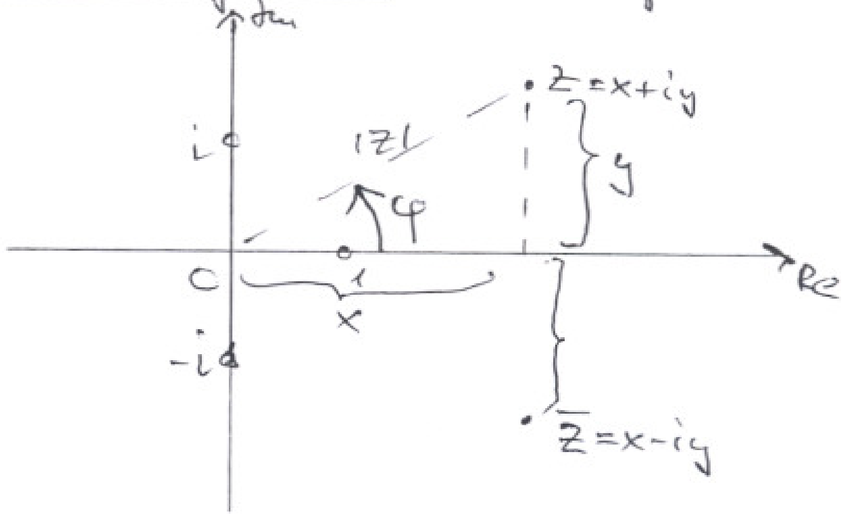
$$z\bar{z}=x^2+y^2=(\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z))^2$$

Satz 1

a) Mit komplexen Zahlen $z = x+iy$ wird, was (A) und (M) anbelangt, wie mit reellen Zahlen gerechnet; neu wird $i^2 = -1$ berücksichtigt.

b) $z \to \bar{z}$ ist eine bijektive Abbildung von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$. Es gelten: $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$, $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$.

6.2 Veranschaulichung von z in der komplexen Ebene



Mit $|z|$ wird der Abstand von z zu 0 bezeichnet.
$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ heißt Betrag von z.

Der Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $y = |z| \sin\varphi$, $x = |z| \cos\varphi$ heißt das Argument von z und die hiermit aus $z = x+iy$ resultierende Darstellung für $z \neq 0$:
$z = |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ heißt die Polardarstellung von z. Das Argument von z wird durch $\arg(z)$ bezeichnet.

Beispiele:

$\arg(i) = \frac{\pi}{2}$, $\arg(x) = \begin{cases} 0 & , x > 0 \\ \pi & , x < 0 \end{cases}$, $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$,

$\arg(-i) = 3\frac{\pi}{2}$.