Satz 2:
Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ kann in der Form
$z = r(\cos\psi + i\sin\psi)$ dargestellt werden. Hierbei
gelten: $r = |z|$ und $\psi = \arg(z) + 2k\pi$ für
ein $k \in \mathbb{Z}$.

6.3 Rechnen mit $|\cdot|$ und mit der Polardarstellung

Bemerkungen: 1) $|z-w|$ gibt die Länge der Verbindungsstrecke zwischen z und w an.
Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$:
$U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$ heißt ε-Umgebung von z_0. In $U_\varepsilon(z_0)$ liegen alle Punkte des Kreises um z_0 mit Radius ε.

2) (Nachtrag zu Abschnitt 6.1) In $\mathbb{C}$ gibt es keine Ordnung, keine Relation, die den Axiomen O1, O2, O3 aus 4.2 genügt. Es müssten nämlich gleichzeitig
$1 = 1^2 > 0$ und $-1 = i^2 > 0$ gelten.

Satz 3: Es seien $z, w \in \mathbb{C}$. Es gelten:
1) $|z| = |\bar{z}|$, 2) $|z| \geq 0$ und $(|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0)$
3) $|zw| = |z||w|$, 4) $|z \pm w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)
5) $|z \pm w|^2 = |z|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}(\bar{z}w) + |w|^2$

Satz 4: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ seien komplexe Zahlen, $z \neq 0$, $w \neq 0$. Es gelten:
1) $z = w \Leftrightarrow r = \rho \;\wedge\; \varphi = \psi + 2k\pi \; (k \in \mathbb{Z})$
2) $\bar{z} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-1} = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$
3) $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\frac{\bar{z}}{r} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$

4) $zw = r\varrho\,(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$

5) $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$, $n \in \mathbb{Z}$ (Formel von Moivre)

6.4 Die n-te Wurzel aus $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$

Satz 5 Es seien $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gegeben.
Die Gleichung $z^n = a$ hat genau die n verschiedenen Lösungen

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right),\ k = 0,1,2,\dots,n-1.$$

Hierbei ist $\alpha = \arg(a)$.

Ü: Gib alle Lösungen z an:
$z^5 = 1$, $z^3 = -i$, $z^4 = 1+i$, $z^2 + 2az + b = 0$ (wobei $a, b \in \mathbb{C}$ gegeben sind)

Bemerkung Fundamentalsatz der Algebra
Für jedes Polynom $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0$
gibt es Zahlen $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, so dass
$p(z) = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$ gilt. ($n \in \mathbb{N}$)

Kapitel 7 Folge. Grenzwert.

7.1 Definition (Folge)

Eine Folge komplexer Zahlen ist eine Abbildung
$\mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $n \to a_n$. Sie wird durch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder
auch nur durch (a_n) bezeichnet oder durch Aufzählung
der Folgeglieder $a_1, a_2, a_3, \dots$
Die Folge heißt beschränkt, falls es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$
mit $|a_n| < M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt.

Eine reelle Folge heißt <u>monoton (streng monoton) wachsend</u>, falls $a_n \leq a_{n+1}$ $(a_n < a_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir schreiben hierfür $(a_n)\uparrow$ ($(a_n)\uparrow$(streng)).
Eine reelle Folge heißt <u>monoton (streng monoton) fallend</u> $(a_n)\downarrow$ ($(a_n)\downarrow$(streng)) $:\Longleftrightarrow$ $(-a_n)\uparrow$ ($(-a_n)\uparrow$(streng)).

<u>Beispiele</u>: (a_n) mit

1) $a_n = \frac{1}{n}$, 2) $a_n = i^n$, 3) $a_n = \frac{n}{n+1}$

4) $a_n = x^n$ ($x \in \mathbb{R}$ oder auch $x \in \mathbb{C}$)

5) $a_n = \frac{n}{2^n}$

6) a_n ist durch $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} := a_n + a_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ definiert.

<u>Definition</u> (<u>Teilfolge</u> einer Folge)
Es seien (a_n) eine Folge und $v : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Funktion (Es wird v_j anstelle von $v(j)$ für $j \in \mathbb{N}$ geschrieben).
Die Folge (b_j) mit $b_j := a_{v_j}$ heißt <u>Teilfolge der Folge (a_n)</u>.

<u>Beispiele</u> $b_j = a_{2j}$, $b_j = a_{j^2}$

oder oben Beispiel 2): $b_k = a_{4k-1} = -i$ $(k \in \mathbb{N})$

<u>Bemerkung</u> ($\ddot{U}$) Für eine Funktion v wie in vorstehender Definition gilt: $v(j) \geq j$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

7.2 Konvergenz, Divergenz, Häufungspunkt

Definition (Konvergenz)

Die Folge (a_n) heißt Konvergent, falls eine Zahl $g \in \mathbb{C}$ existiert mit folgender Eigenschaft:

Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$|a_n - g| < \varepsilon$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$.

g heißt Grenzwert (Limes) der Folge (a_n). Hierfür schreiben wir: $\lim_{n \to \infty} a_n = g$ oder $a_n \to g$ $(n \to \infty)$.

Verwenden wir den Umgebungsbegriff aus Abschnitt 6.3 und 4.3 und die Sprechweise: "alle bis auf endlich viele" = "fast alle", so können wir auch so formulieren: Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ für fast alle n (nämlich für alle bis auf allenfalls $n = 1, 2, \ldots, N$) $a_n \in U_\varepsilon(g)$ gilt.

Definition (Divergenz)

Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt divergent.

Die Negation der vorherigen Def gibt:

Die Folge (a_n) ist divergent, wenn jedes $g \in \mathbb{C}$ eine ε-Umgebung besitzt, außerhalb der unendlich viele Folgenglieder liegen.

Die Folge (a_n) mit $a_n = i^n$, Beispiel 2)/7.1, ist divergent.

Definition (Häufungspunkt (HP))

$H \in \mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt (HP) der Folge (a_n), falls für jedes $\varepsilon > 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ $a_n \in U_\varepsilon(H)$ gilt.

Zu 7.1, Beispiel 2) sind $i, 1, -1, -i$ HPs der Folge.

A1 Ist g Grenzwert der Folge (a_n), so ist g auch HP der Folge (a_n).

A2 $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = g\right) \Longleftrightarrow$ (g ist der einzige HP der Folge (a_n))

Folgerungen: 1) Die Folge (a_n), $a_n = i^n$, ist divergent.

2) Eine Folge mit mehr als einem HP ist divergent.

3) Eine konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.

Satz 1 (Bolzano-Weierstrass)

Jede beschränkte Folge besitzt einen HP.

Satz 2 Es sei (a_n) eine Folge. Dann gilt:

H ist HP von (a_n) $\Longleftrightarrow$ es gibt eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$, die gegen H konvergiert.

Folgerung

Jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge.

Die Folge aus 7.1, Beispiel 2) $a_n = i^n$ enthält die konvergenten Teilfolgen:

$(a_{4k-3})_k$, $(a_{4k-2})_k$, $(a_{4k-1})_k$, $(a_{4k})_k$.