7.3 Die Beispiele aus 7.1

1/ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Das ist Satz 11, Kap 4.

2/ (a_n) mit $a_n = i^n$. Die Folge hat die vier HP $i, 1, -i, -1$, ist somit divergent.

3) (a_n), $a_n = \frac{n}{n+1}$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, $N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Dann gilt

$|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n > N$. Also: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

4) (a_n), $a_n = x^n$

$\underline{x=1}$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $\underline{x=0}$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\underline{x=-1}$: (a_n) hat die zwei HP $+1, -1$, ist also divergent.

$\underline{|x|>1}$. Es sei $R > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, $N > \frac{R}{|x|-1}$. Dann gilt für alle $n > N$: $|x|^n > R$.

<u>Für $|x| > 1$ ist (x^n) divergent</u>, da (x^n) nicht beschränkt ist.

<u>Satz 3</u> <u>Eine konvergente Folge ist beschränkt</u>

Es gilt aber für $x > 1$, dass (x^n) in folgendem Sinn "konvergiert":

gilt für die reelle Folge (a_n), dass für jedes R fast alle $a_n > R$ erfüllt ist, so schreiben wir: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

Die Folge (a_n) heißt dann <u>bestimmt divergent oder uneigentlich konvergent gegen ∞</u>

(analog: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \;:\Longleftrightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} (-a_n) = \infty$)

Also: Für $x > 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \infty$. Für $x < -1$ liegt Divergenz vor.

Für $\underline{|x| < 1}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

6) (a_n): $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$

Für $n \geq 2$ gilt $a_n \geq 1$ und für $n \geq 3$ hat man $a_{n+1} - a_n \geq 1$.
Hieraus folgt, dass (a_n) unbeschränkt ist und nicht im eigentlichen Sinn konvergiert.

7.4 Rechnen mit konvergenten Folgen

Satz 4 (a_n), (b_n) seien konvergente reelle Folgen. Für fast alle n sei $a_n \leq b_n$ erfüllt. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Satz 5 Für die reellen Folgen (a_n), (b_n), (c_n) sei $a_n \leq b_n \leq c_n$ für fast alle n erfüllt.

Aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$ folgt, dass die Folge (b_n) konvergent ist mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$

Folgerung: Für die Folge (a_n) gelte $|a_n| \leq b_n$ für fast alle n, wobei (b_n) eine (reelle) Nullfolge ist. Dann folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Satz 6 Es seien (a_n), (b_n) konvergente Folgen: $a_n \to a$, $b_n \to b$. Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann sind die Folgen (λa_n), $(a_n \pm b_n)$, $(a_n b_n)$, $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ $(b \neq 0)$, $(|a_n|)$, $(a_n^k)_n$ $(k \in \mathbb{N}$, fest$)$, $(\sqrt{a_n})$ $(a_n > 0)$

konvergent mit: $\lambda a_n \to \lambda a$, $a_n \pm b_n \to a \pm b$, $a_n b_n \to ab$, $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$, $|a_n| \to |a|$, $a_n^k \to a^k$, $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$.

Zu Beispiel 5) aus 7.1:

(a_n), $a_n = \frac{n}{2^n}$. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

Das sieht man etwa so:

$$2^n = (\text{binomischer Satz}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$$
$$= 1 + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} > \frac{n^2}{2}$$

$\Rightarrow$ $\frac{n}{2^n} < \frac{2}{n}$. Mit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$ und

Satz 5 folgt wegen $0 < \frac{n}{2^n}$ die obige Behauptung.

Noch 2 Beispiele

1) Die geometrische Reihe

Es sei $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$. Dann konvergiert (s_n) mit

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n-1}}{1-q} \text{ gegen } \frac{1}{1-q}.$$

Man schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n =: \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$

2) Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} := \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ existiert

nicht. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent, da die Teilfolge (a_n')

$a_n' = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k}$ von $(a_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$ unbeschränkt ist, also

divergiert (4. Ü / A 2/c); siehe auch Satz 3 oben).

7.5 Monotone Konvergenz

Satz 7 Die (reelle) Folge (a_n) sei monoton wachsend und nach oben beschränkt ($(a_n) \downarrow$ und nach unten beschränkt). Dann ist die Folge (a_n) konvergent, es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ($\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$).

Beispiele: 1) (a_n): $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \sqrt{12+a_n}$ $(n = 1, 2, \dots)$

$(a_n)\uparrow$ und $a_n \leq 4$. $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$.

2) $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Es gilt $(a_n)\uparrow$ und $a_n < 3$

Der Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ($= \lim_{n\to\infty} a_n$) ist die Eulersche Zahl. $e := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

7.6 Zwei wichtige Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1 \qquad (c > 0 \text{ fest})$$

7.7

Satz 8 (Intervallschachtelung)

$(\alpha_n)\uparrow$, $(\beta_n)\downarrow$ seien monotone Zahlenfolgen, die den Bedingungen 1) $\alpha_n \leq \beta_n$ für alle n

2) $\lim_{n\to\infty} (\beta_n - \alpha_n) = 0$ genügen.

Dann gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_n \leq x \leq \beta_n$ für alle n. Es gelten $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = x$.

<u>Bemerkung</u>: I_n bezeichne das Intervall $[\alpha_n, \beta_n]$, $|I_n|$ die Länge von I_n.
Der Satz sagt dann aus: gelten $I_{n+1} \subset I_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0$, so hat man
$$\bigcap_{j=1}^{\infty} I_j = \{x\} \text{ und } \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = x.$$

<u>Satz 9</u> (<u>Leibniz-Kriterium</u>) (Anwendung von Satz 8)
Es sei (a_n) eine Folge mit den Eigenschaften:
<u>$a_n > 0$, $(a_n) \downarrow$, $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.</u> Dann gilt:
Die Folge (s_m), $s_m := \sum_{n=0}^{m} (-1)^n a_n$ ist konvergent:
$\lim_{m\to\infty} s_m = s =: \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$. Weiter hat man:

a) $s_{2k+1} \le s \le s_{2k}$ $\quad k = 0, 1, 2, \dots$

b) $|s - s_m| \le a_{m+1}$ $\quad m = 0, 1, 2, \dots$

Zur <u>Begründung</u>
Setze $\alpha_k := s_{2k+1}$, $\beta_k := s_{2k}$. Die Folgen (α_k), (β_k) genügen den Voraussetzungen von Satz 8:
$\{[\alpha_k, \beta_k] \mid k \in \mathbb{N}\}$ bilden eine Intervallschachtelung, die s festlegt.

<u>Beispiele</u>: 1) Die <u>alternierende harmonische Reihe</u> $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}$
$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1}$ ist konvergent.

2) (A9 (5. Ü)) Durch $\alpha_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $\beta_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ wird eine Intervallschachtelung $\{[\alpha_n, \beta_n] \mid n \in \mathbb{N}\}$ definiert. Sie bestimmt die Zahl e.