8.1 Es sei (a_k) eine Zahlenfolge. Wir nennen einen Ausdruck der Form $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe und verstehen darunter zweierlei: 1) die Folge (s_n) der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

und 2) den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n$, falls er existiert. Dieser Grenzwert heißt dann Wert (Summe) der Reihe. Existiert $\lim_{n\to\infty} s_n$, so sagen wir: die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent.

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist divergent, falls die Folge (s_n) divergent ist.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$ $(-\infty)$ bedeutet, dass $s_n \to \infty$ $(-\infty)$ $(n\to\infty)$.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$ bedeutet: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = A$.

Satz 1 Es gelte $a_k \geq 0$ für alle k. Es gilt dann:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent $\iff$ (s_n) ist eine beschränkte Folge.
($s_n \leq M$ für alle n)

Satz 2

Aus der Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ folgt: $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Bemerkungen

1) Das Konvergenzverhalten einer Reihe ändert sich nicht, wenn man endlich viele Summanden der Reihe ändert.

2) (Ergebnisse zu Reihen aus dem 7. Kapitel)

geometrische Reihe: Für $|z|<1$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$

harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist bestimmt divergent gegen ∞.

die Zahl e $= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

das Leibnizkriterium : Satz 9, 7.7

die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}$

ist konvergent.

8.2

Satz 3 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$, $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = B$ seien konvergente Reihen.

Dann ist die Reihe $\sum_{\ell=1}^{\infty} (\lambda a_\ell + \mu b_\ell)$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{C})$ konvergent

mit dem Wert $\lambda A + \mu B$.

Satz 4 In einer konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ dürfen

beliebig Klammern gesetzt werden: Setzt man mit

$0 = k_0 < k_1 < k_2 < \dots$; $A_j = a_{k_{j-1}+1} + \dots + a_{k_j}$ $(j = 1, 2, \dots)$

so gilt $\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Schon vorhandene Beklammerungen in einer konvergenten Reihe dürfen nur dann weggelassen werden, wenn die so entstehende Reihe wieder konvergent ist.

Definition : Es sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung.

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ heißt eine Umordnung

der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beispiel $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + + - \dots$ ist eine

Umordnung von $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots$

<u>Definition</u>: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt <u>absolut konvergent</u>, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

<u>Beispiele</u>: 1) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}$ ist absolut konvergent.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ sind konvergente aber nicht absolut konvergente Reihen.

<u>Satz 5</u>

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent $\Longleftrightarrow$ jede Umordnung konvergiert, und alle Umordnungen haben den Wert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

<u>8.3 Konvergenzkriterien</u>

<u>Satz 6</u> (<u>Majorantenkriterium</u>)

Gegeben sind zwei Zahlenfolgen (c_n), (a_n) mit:

1) $0 \leq c_n \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist konvergent.

Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent.

($\sum a_n$ ist eine (konvergente) Majorante für $\sum c_n$)

<u>Satz 7</u> (folgt für reelle Reihen aus Satz 6)

Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent.

(Die Umkehrung ist falsch: oben Beispiele 2))

Es gilt $\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

<u>Satz 8</u> (<u>Quotientenkriterium</u>)

(c_n) sei eine Zahlenfolge mit $c_n \geq 0$. Es existiere eine Zahl $\vartheta < 1$ derart, dass

$$c_{n+1} \leq \vartheta c_n \text{ für fast alle } n \text{ erfüllt ist.}$$

Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

<u>Beispiel</u>: Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ absolut konvergent.

<u>Satz 9</u> (<u>Wurzelkriterium</u>)

Es sei $c_n \geq 0$, und es existiere eine Zahl $\vartheta < 1$ so, dass für fast alle n $\sqrt[n]{c_n} \leq \vartheta$ erfüllt ist.
Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent.

Aus $\sqrt[n]{c_n} \geq 1$ für unendlich viele n folgt die Divergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

<u>Beispiele</u>:

1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots$

<u>Satz 9</u> $\Rightarrow$ Konvergenz (wähle ϑ zwischen $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und 1)

Mit <u>Satz 8</u> ist keine Entscheidung möglich bzgl. Konvergenz / Div.

2) (in der Vorlesung nicht besprochen)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \cdots$$

<u>Satz 9</u> $\Rightarrow$ Konvergenz (man kann $\vartheta = \frac{2}{3}$ wählen)

Mit <u>Satz 8</u> erhält man dieses Ergebnis nicht.

3) Die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ erhält man weder mit Satz 8 noch Satz 9. (Mit Satz 6 / Vorlesung)

8.4 Das Cauchy-Produkt

der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$

mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$.

Satz 10

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sei absolut und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sei konvergent. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \right)}_{=c_n} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \right).$$

Beispiele:

1) (7.4 / A7) Das Cauchy-Produkt der konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ mit sich selbst ist divergent (!?).

2) $\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right)^2 = 4 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{1}{2^n}$

3) $\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (z+w)^k, \quad z, w \in \mathbb{C}.$