Kapitel 9 Die Exponentialfunktion

9.1

Satz 1 (vgl. Beispiel zu Satz 8 im Kap 8)

a) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ absolut konvergent.

Die hierdurch definierte Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ heißt Exponentialfunktion; sie wird durch exp bezeichnet:

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C}, \qquad (1)$$

b) Es gelten:

$$|\exp(z) - 1| \leq |z| \exp(|z|), \quad z \in \mathbb{C} \qquad (2)$$

$$|\exp(z) - 1| \leq 2|z|, \quad |z| \leq 1 \qquad (3)$$

Bemerkungen: $\exp(1) = e = e^1$

$\exp(0) = 1 = e^0$ (mit (1) oder (3))

Satz 2 (8.4, Beispiel 3) Die Funktionalgleichung der exp-Funktion)

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w), \quad z, w \in \mathbb{C} \qquad (4)$$

Folgerungen

1) $\exp(z) \neq 0, \quad z \in \mathbb{C}$

$$(\exp(z))^{-1} = \exp(-z), \quad z \in \mathbb{C} \qquad (5)$$

2) $\exp(nz) = (\exp(z))^n, \quad z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$

(mit (4), (5))

9.2 Die reelle exp-Funktion

Satz 3: a) $\exp(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}$

b) exp $\uparrow$ (streng), c) exp ist eine unbeschränkte Funktion

d) $\exp(q) = e^q, \quad q \in \mathbb{Q}$ (Wir schreiben anstelle von $\exp(z)$ auch e^z)

e) Für jede Zahl $k \in \mathbb{N}$ $(k \in \mathbb{Z})$ gilt: $\lim_{n\to\infty} n^k \exp(-n) = 0$.

9.3 Die trigonometrischen Funktionen sin, cos.

1. $\exp(\bar z) = \overline{\exp(z)}$, $z \in \mathbb{C}$

$\underset{\Longrightarrow}{\text{(Satz 3 d)}}$ $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$ für $x \in \mathbb{R} \overset{(5)}{\Longrightarrow} |e^{ix}| = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Satz 4 Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $(\mathrm{Re}(e^{ix}))^2 + (\mathrm{Im}(e^{ix}))^2 = 1$.

Bemerkung: $|e^{iz}| = e^{-\mathrm{Im}(z)}$, $z \in \mathbb{C}$

2.
$$\cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (-1)^k z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2!} + - \dots \qquad (6)$$

$$\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (-1)^k z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + - \dots \qquad (7)$$

Es gilt: Die Reihen in (6), (7) sind für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent: Der Definitionsbereich von sin und cos ist ganz $\mathbb{C}$. Es gilt (Umordnen der absolut konvergenten Reihe e^{iz}):

$$\underline{e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)}, \quad z \in \mathbb{C} \qquad (8)$$

3. (Folgerungen aus 2.)

1) $\cos(z) = \cos(-z)$, $\cos(0) = 1$

$\sin(z) = -\sin(-z)$, $\sin(0) = 0$

2) $|\sin(z) - z| \leq 2|z|^3$, $|z| \leq 1$

$|\cos(z) - 1| \leq 2|z|^2$, $|z| \leq 1$

3) ((8) $\Rightarrow$)
$$\left.\begin{array}{|l} \cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\ \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \end{array} \quad z \in \mathbb{C} \right\} \quad (9)$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \quad , z \in \mathbb{C} \qquad (10)$$

Mit (9) und (4)/Satz 2 erhält man Additionstheoreme wie etwa

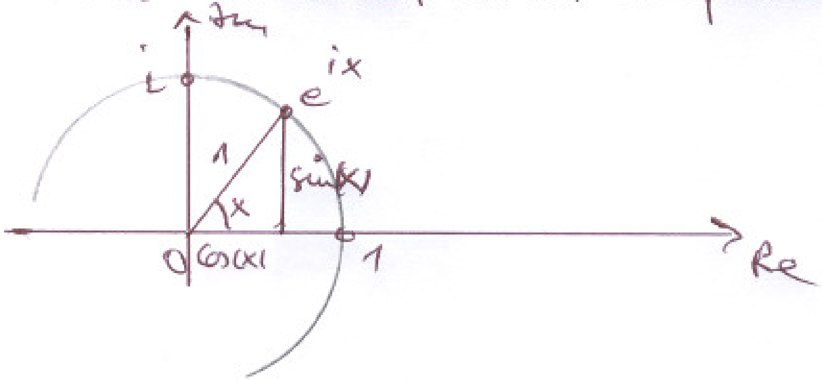
$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$$
$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$

und hiermit

$$\cos(z) - \cos w = -2\sin\frac{z+w}{2}\sin\frac{z-w}{2} \qquad (11)$$
$$\sin(z) - \sin(w) = 2\cos\frac{z+w}{2}\sin\frac{z-w}{2}$$

4. Für $x \in \mathbb{R}$ folgt (mit (8)) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, also $\operatorname{Re}(e^{ix}) = \cos(x)$, $\operatorname{Im}(e^{ix}) = \sin(x)$.

Mit $|e^{ix}| = 1$ $(x \in \mathbb{R})$ findet man $\cos(x)$, $\sin(x)$ am Einheitskreis in der komplexen z-Ebene:



Kapitel 10 Stetigkeit

10.1 Definition

Es sei D eine Menge in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$ und $f: D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. f heißt <u>stetig in $p \in D$</u>, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ so gibt, dass

aus $x \in D$ und $|x-p| < \delta$ folgt: $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$.

Die Funktion heißt <u>stetig (auf D)</u>, wenn sie in jedem Punkt $p \in D$ stetig ist.

Formal sieht das so aus: (Erinnerung $U_\delta(p)$ 6.3)

$$f \text{ ist stetig in } p \in D \iff \forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in U_\delta(p) \cap D} |f(x)-f(p)| < \varepsilon \quad (1)$$

$\Rightarrow$:

$$f \text{ ist in } p \in D \text{ nicht stetig} \iff \exists_{\varepsilon>0} \forall_{\delta>0} \exists_{x \in U_\delta(p) \cap D} |f(x)-f(p)| \geq \varepsilon \quad (2)$$

Satz 1 (Stetigkeit = Folgenstetigkeit)

$f: D \to \mathbb{C}$ ist in $p \in D$ stetig

$\iff$

für jede Folge (x_n), $x_n \in D$, mit $x_n \to p$ $(n \to \infty)$
gilt $f(x_n) \to f(p)$ $(n \to \infty)$.

(dies kann man auch so formulieren: Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$
für stetiges f)

Zur Begründung: „$\Rightarrow$" Hier verwendet man (1) in Verbindung mit der Definition für Grenzwert von Folgen.
„$\Leftarrow$" Hier argumentiert man am besten indirekt mit (2) und $\delta = \frac{1}{n}$ und zugehörigen x_n.

10.2 Beispiele:

1) $f(z) = c$ (konst) ist auf $\mathbb{C}$ stetig (δ kann beliebig gewählt werden)

2) $f(z) = z$ ist auf $\mathbb{C}$ stetig (wähle z.B. $\delta = \varepsilon$)

3) $f(z) = \exp(z)$ ist in $z=0$ stetig. Verwende 9.1, (3).
$f(z) = \exp(z)$ ist in $z = p \in \mathbb{C}$ stetig. Verwende Satz 2, Kap 9