4) $f(z) = \sin(z)$ und $f(z) = \cos(z)$ sind für alle $z \in \mathbb{C}$ stetig. (Verwende 9.3 3.2), 9.3 (11))

5) $\mathrm{abs}(z) := |z|$ ist stetig für jedes $z \in \mathbb{C}$.

10.3 Zum Rechnen mit stetigen Funktionen

Satz 2: Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ stetig in $p \in D$. Es gelte $f(p) \neq 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit: es gilt $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$ mit $|z-p| < \delta$.

(Setze in der ε-δ-Definition der Stetigkeit in p $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(p)|$. Mit einem zugehörigen δ gilt dann $|f(z)| > \frac{1}{2}|f(p)|$, $|z-p| < \delta$.)

Satz 3 (siehe 7.4 / Satz 6 und hier Satz 1)
$f, g : D \to \mathbb{C}$ seien in $p \in D$ stetige Funktionen. Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann sind die Funktionen $f+g$, fg, λf in p stetig. Ist $g(p) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g} : \{z \in D / g(z) \neq 0\} \to \mathbb{C}$ in p stetig.

Satz 4
Es sind $f : G \to \mathbb{C}$ und $g : D \to \mathbb{C}$ mit $f(G) \subset D$ gegeben. Ist f in $p \in G$ und g in $f(p)$ stetig, so ist $g \circ f$ in p stetig.

Beispiele:
1) Mit f ist $|f| = \mathrm{abs} \circ f$ stetig
2) Mit $q(z) = z^2$ sind $\exp \circ q$ und $q \circ \exp$ für alle $z \in \mathbb{C}$ stetig.
3) Jedes Polynom $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ist stetig für jedes $z \in \mathbb{C}$.

10.4 Grundlegende Sätze zu Stetigkeit

In diesem Abschnitt ist D stets das abgeschlossene, beschränkte Intervall $[a,b]=\{x \mid a\le x\le b\}$. $C^0([a,b])$ bezeichnet die Menge der auf $[a,b]$ definierten und auf $[a,b]$ stetigen Funktionen.

Satz 5 Für $f\in C^0([a,b])$ gelte $f(a)f(b)<0$.
Dann gibt es ein $x_0\in[a,b]$ mit $f(x_0)=0$.

(Begründung: Intervallschachtelung, Bisektionsverfahren)

Folgerung 1 (Der Zwischenwertsatz)
Für $c\in\mathbb{R}$ und $f\in C^0([a,b])$ sei $(f(a)-c)(f(b)-c)<0$ erfüllt. Dann gibt es ein $x_0\in(a,b)$ mit $f(x_0)=c$.
(Satz 5 für $f(x)\to f(x)-c$)

Folgerung 2
Es sei $f\in C^0([a,b])$ streng monoton wachsend (fallend). Dann ist $f:[a,b]\to[f(a),f(b)]$ $([a,b]\to[f(b),f(a)])$ bijektiv.

Anwendung Für $\alpha>0$ und $n\in\mathbb{N}$ hat die Gleichung $x^n=\alpha$ genau eine positive Lösung $x_0 (:=\sqrt[n]{\alpha})$.

Satz 6
$f\in C^0([a,b])$ sei streng monoton wachsend
f^{-1} ist dann auf $[f(a),f(b)]$ stetig und streng monoton wachsend.

Beispiel: Diskussion von $f(x)=x^k$ $(k\in\mathbb{N})$ für $x\in\mathbb{R}$ samt Umkehrfunktion (k ungerade) / Umkehrfunktionen (k gerade).

Satz 7 Es sei $f \in C^0([a,b])$.
Dann ist f beschränkt: Es gibt eine Zahl $K > 0$ mit
$$|f(x)| \leq K \quad \text{für } a \leq x \leq b.$$
Weiter gibt es $x_0, x_1 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ für $a \leq x \leq b$. ($f(x_0) = \min\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$,
$f(x_1) = \max\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$)

Der Satz ist falsch in offenen, halboffenen oder beschränkten Intervallen.

10.5

Es sei f in $D \setminus \{p\}$ stetig. Für jede Folge (x_n), $x_n \in D$ mit $x_n \to p$ gelte $\lim\limits_{x_n \to p} f(x_n) = A$.

(hierfür haben wir schon geschrieben: $\lim\limits_{x \to p} f(x) = A$).

Es sei $A \neq f(p)$.
Dann ist f in p unstetig. Die Funktion
$$g : D \to \mathbb{C} \text{ mit } g(x) := \begin{cases} f(x) & x \neq p \\ A & x = p \end{cases}$$
ist stetig auf D und stimmt auf $D \setminus \{p\}$ mit f überein. g heißt <u>stetige Fortsetzung von f auf D</u>.
Die Unstetigkeit von f in p ist <u>hebbar</u>.

<u>Beispiele</u>

1) $f(x) = \dfrac{x + x^3}{x}$, $x \neq 0$: $\quad g(x) = 1 + x^2$

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$, $x \neq 1$, $x > 0$: $\quad g(x) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{x}}$

3) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $x \neq 0$: f lässt sich nicht stetig nach 0 fortsetzen.

Kapitel 11 Potenzreihen

11.1

(a_n) sei eine Zahlenfolge. Der Ausdruck $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ heißt Potenzreihe um z_0.

Beispiele: $\left(\frac{1}{1-z} =\right) \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad (z_0 = 0)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(z-1)^k \ (= \exp(z-1)) \quad (z_0 = 1).$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}(z-z_0)^{2k+1} \ (= \sin(z)\cos(z_0) - \cos(z)\sin(z_0))$$

Mittels der Substitution $z \to \zeta := z - z_0$ kann z_0 zu Null transformiert werden, so dass wir o.B.d.A.

$$(P) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k}_{=: P_n(z)} =: p(z) \text{ falls konvergent}$$

untersuchen.

Satz 1

a) Es sei $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$. Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$ konvergent ist, dann sind die folgenden Reihen für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |w|$ absolut konvergent:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}, \quad \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k z^{k-2}.$$

b) Ist (P) für $z = \zeta$ divergent, so ist (P) für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > |\zeta|$ divergent.

Beispiel: $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} z^k$ ist absolut konvergent für $|z| < 1$ und divergent für $|z| > 1$.