KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2010/11
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. T. Gauss

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Mit der Reihenentwicklung von $\exp x$ erhalten wir

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\dots}{1}=1$$

(Die letzte Gleichheit gilt aufgrund der Stetigkeit von Potenzreihen, vgl. Satz 3 in 11.3).

b) Mit der Reihenentwicklung von $\sin x$ und $\cos x$ erhält man für jedes $x\in(-\pi,\pi)\setminus\{0\}$

$$\frac{\cos(x^2)-1}{\sin^4 x}=\frac{\big(1-\frac{1}{2!}(x^2)^2+\frac{1}{4!}(x^2)^4-\frac{1}{6!}(x^2)^6+-\dots\big)-1}{\big(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+-\dots\big)^4}=$$

$$\frac{-\frac{1}{2!}x^4+\frac{1}{4!}x^8-\frac{1}{6!}x^{12}+-\dots}{x^4\big(1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\frac{1}{7!}x^6+-\dots\big)^4}=\frac{-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^8+-\dots}{1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\frac{1}{7!}x^6+-\dots}.$$

Schließlich erhalten wir mit der Stetigkeit von Potenzreihen (vgl. Satz 3 in 11.3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2)-1}{\sin^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^8+-\dots}{1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\frac{1}{7!}x^6+-\dots}=\frac{-\frac{1}{2!}}{1}=-\frac{1}{2}.$$

c) Mit der Reihenentwicklung von $\sin x$ erhält man für jedes $x\in(-\pi,\pi)\setminus\{0\}$

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\frac{x-(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+-\dots)}{x(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+-\dots)}=$$

$$\frac{\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{7!}x^7-+\dots}{x^2-\frac{1}{3!}x^4+\frac{1}{5!}x^6-\frac{1}{7!}x^8+-\dots}=\frac{\frac{1}{3!}x-\frac{1}{5!}x^3+\frac{1}{7!}x^5-+\dots}{1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\frac{1}{7!}x^6+-\dots}.$$

Daraus erhält man für jedes $x\in(-\pi,\pi)\setminus\{0\}$

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{1}{3!}x-\frac{1}{5!}x^3+\frac{1}{7!}x^5-+\dots}{1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\frac{1}{7!}x^6+-\dots}=\frac{\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}x^2+\frac{1}{7!}x^4-+\dots}{1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\frac{1}{7!}x^6+-\dots}.$$

Schließlich erhalten wir mit der Stetigkeit von Potenzreihen (vgl. Satz 3 in 11.3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}x^2+\frac{1}{7!}x^4-+\dots}{1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\frac{1}{7!}x^6+-\dots}=\frac{\frac{1}{3!}}{1}=\frac{1}{6}.$$

d) Wir bemerken zunächst, daß

$$\cosh(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{6!}x^6\dots\text{ und}$$

$$\sinh(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{7!}x^7+\dots$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt (das erhält man direkt aus der Definition zusammen mit der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion, vgl. Ergänzungsmaterial zur 10. Übung).

Außerdem überlegt man sich leicht, daß $\cosh x > 1$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt (das folgt aus dem jeweiligen Monotonieverhalten auf $(-\infty, 0]$ bzw. $[0, \infty)$, vgl. wieder Ergänzungsmaterial zur 10. Übung).

Damit sehen wir, daß der Nenner des zu untersuchenden Bruchs außer für $x = 0$ keine weiteren Nullstellen hat.

Für $x \neq 0$ erhalten wir also mit Hilfe der entsprechenden Reihenentwicklung

$$\frac{\sinh x - \sin x}{x(\cosh x - 1)} = \frac{(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \ldots) - (x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + - \ldots)}{x((1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \ldots) - 1)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3!}x^3 + \frac{2}{7!}x^7 + \frac{2}{11!}x^{11} + \ldots}{\frac{1}{2!}x^3 + \frac{1}{4!}x^5 + \frac{1}{6!}x^7 + \ldots} = \frac{\frac{2}{3!} + \frac{2}{7!}x^4 + \frac{2}{11!}x^8 + \ldots}{\frac{1}{2!}x + \frac{1}{4!}x^2 + \frac{1}{6!}x^4 + \ldots}.$$

Schließlich erhalten wir mit der Stetigkeit von Potenzreihen (vgl. Satz 3 in 11.3)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x(\cosh x - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{3!} + \frac{2}{7!}x^4 + \frac{2}{11!}x^8 + \ldots}{\frac{1}{2!}x + \frac{1}{4!}x^2 + \frac{1}{6!}x^4 + \ldots} = \frac{\frac{2}{3!}}{\frac{1}{2!}} = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 2

a) Wir setzen $f(x) := \frac{\sin x}{x}$ und $\chi(t) := \sin(t^2 - 1)$ für alle $x, t \in \mathbb{R}$, für die die Ausdrücke erklärt sind.

Es gilt (wegen der Stetigkeit des Sinus) $x_0 := \lim\limits_{t \to 1} \chi(t) = \sin(0) = 0$.

Außerdem gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(t) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ (dies erhält man direkt aus der Potenzreihenentwicklung des Sinus).

Damit erhalten wir aus den Grenwertsätzen zu Kompositionen

$$\lim_{t \to 1} \frac{\sin\big(\sin(t^2 - 1)\big)}{\sin(t^2 - 1)} = \lim_{t \to 1} (f \circ \chi)(t) = \lim_{x \to x_0} f(x) = 1.$$

Bemerkungen:

1.) Beachten Sie, daß für die obige Argementation insbesondere notwendig war, daß der „innere Grenzwert“ $\lim_{t \to 1} \chi(t)$ exisitiert.

2.) Kurz läßt sich die obige Rechnung auch so ausdrücken:

$$\lim_{t \to 1} \frac{\sin\big(\sin(t^2 - 1)\big)}{\sin(t^2 - 1)} \overset{x := \sin(t^2 - 1)}{=} \lim_{x \to \left(\lim\limits_{t \to 1} \sin(t^2 - 1)\right)} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{\text{PR-Entw.}}{=} 1.$$

b) Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x}$ exisitiert nicht: Dazu betrachten wir die beiden Folgen $(x_n)_n$ und $(\tilde{x}_n)_n$ mit $x_n := n\pi$ bzw. $\tilde{x}_n := 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Offenbar gilt dann $x_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$ und $\tilde{x}_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$. Wenn $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x}$ exisitieren würde, müßte also insbesondere

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin^2 x_n}{1 + \sin^2 x_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin^2 \tilde{x}_n}{1 + \sin^2 \tilde{x}_n}$$

gelten. Dies ist aber nicht der Fall, vielmehr gilt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin^2 x_n}{1 + \sin^2 x_n} = \lim_{n \to \infty} 0 = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin^2 \tilde{x}_n}{1 + \sin^2 \tilde{x}_n}.$$

c) Wir bemerken zunächst: Für jedes $t \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ gilt: Aus $x = \ln(1 + t)$ folgt $t = e^x - 1$.

Weiter gilt wegen der Stetigkeit des Logarithmus $x_0 := \lim\limits_{t\to 0} \ln(1+t) = \ln 1 = 0$.

Wir erhalten damit

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(t+1)}{t} \overset{x:=\ln(1+t)}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} \overset{\text{Aufgabe 1a)}}{=} 1.$$

Bemerkung: Mit Hilfe dieses Grenzwertes kann man einsehen, daß $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

Für $x = 0$ ist die Aussage klar, weil dann auf der linken und rechten Seite der Gleichung 1 steht. Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fest. Da $(\frac{x}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, liefert Teil c)

$$1 = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+x/n)}{x/n}.$$

Deshalb ergibt sich unter Verwendung der Stetigkeit des Logarithmus

$$1 = \lim_{n\to\infty} \tfrac{n}{x} \ln\left(1+\tfrac{x}{n}\right) = \tfrac{1}{x} \lim_{n\to\infty} \left(\ln\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n\right) = \tfrac{1}{x} \ln\left(\lim_{n\to\infty} \left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \ln\left(\lim_{n\to\infty} \left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n\right) \quad \Leftrightarrow \quad e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n.$$

d) Zunächst erhalten wir formal (d. h. hier: ohne zu betrachten, ob der Grenzwert tatsächlich exisitiert):

$$\lim_{x\to-\infty} e^x \ln(\tan(e^x)) \overset{y:=e^x}{=} \lim_{y\to 0+} y \ln(\tan y).$$

Eine oft gute Idee zu Ausdrücken wie dem letzten Grenzwert ist die Intuition

„$\tan y \approx y$ für kleine y“

(damit meint man etwa $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\tan y}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \cos(y) \cdot \frac{\sin y}{y} = 1 \cdot \lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \overset{\text{PR-Entw.}}{=} 1 \cdot 1 = 1$).

Diese Intuition können wir auf folgende Weise zu einem gültigen Argument verwenden:

$$\lim_{y\to 0+} y \ln(\tan y) = \lim_{y\to 0+} \frac{y}{\tan y} \cdot \tan(y) \cdot \ln(\tan y) =$$

$$1 \cdot \lim_{y\to 0+} \tan(y) \cdot \ln(\tan y) \overset{z:=\tan y}{=} \lim_{z\to 0+} z \cdot \ln(z)$$

(wobei wir weiterhin noch einen Beweis schuldig sind, daß die betrachteten Grenzwerte überhaupt exisitieren).

Mit einer letzten Substitution (oder direkt mit Blatt 9 Aufgabe 4 c (v)) erhalten wir schließlich

$$\lim_{z\to 0+} z \cdot \ln(z) \overset{w:=\ln z}{=} \lim_{w\to-\infty} e^w \cdot w \overset{\text{Kap. 9.2}}{=} 0.$$

Weil dieser letzte Grenzwert existiert, sind damit auch alle vorangegangenen Substitutionen gerechtfertigt und wir halten als Fazit fest:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x \ln(\tan(e^x)) = 0.$$

Aufgabe 3

a) Sei $x > 0$. Wir formen die gegebene Gleichung $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x}\,)^x$ äquivalent um

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x}\,)^x \quad \Leftrightarrow \quad (e^{\ln x})^{\sqrt{x}} = (e^{\ln\sqrt{x}})^x \quad \Leftrightarrow \quad e^{(\ln x)\sqrt{x}} = e^{(\frac{1}{2}\ln x)x} \quad \Leftrightarrow \quad e^{(\ln x)\sqrt{x}}\, e^{-(\frac{1}{2}\ln x)x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{(\sqrt{x}-\frac{1}{2}x)\ln x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{x} - \tfrac{1}{2}x)\ln x = 0\,.$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $\ln x = 0$ (also $x = 1$) oder wenn $\sqrt{x} - \frac{1}{2}x = \sqrt{x}\,(1 - \frac{1}{2}\sqrt{x}\,) = 0$ gilt. Letzteres gilt genau für $\sqrt{x} = 2$, also $x = 4$. (Man beachte $x > 0$.) Somit gilt $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x}\,)^x$ genau für $x = 1$ oder $x = 4$.

b) **i)** Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}
2^{x-1} + 3^{x+1} = 2^{x+4} + 3^{x-1} \quad &\Longleftrightarrow \quad 2^{x-1} - 2^{x+4} = 3^{x-1} - 3^{x+1} \\
&\Longleftrightarrow \quad 2^x(\tfrac{1}{2} - 2^4) = 3^x(\tfrac{1}{3} - 3) \\
&\Longleftrightarrow \quad 2^x(-\tfrac{31}{2}) = 3^x(-\tfrac{8}{3}) \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{2^x}{3^x} = \frac{8/3}{31/2} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{16}{93} \\
&\Longleftrightarrow \quad x = \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{16}{93}\right) = \frac{\ln \frac{16}{93}}{\ln \frac{2}{3}} = \frac{\ln 16 - \ln 93}{\ln 2 - \ln 3}.
\end{aligned}$$

ii) Die Gleichung $x^{\log_{10} x} = 100\,x$ ist nur für $x \in (0, \infty)$ sinnvoll. Für $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
x^{\log_{10} x} = 100\,x \quad &\Longleftrightarrow \quad \log_{10}(x^{\log_{10} x}) = \log_{10}(100\,x) \\
&\Longleftrightarrow \quad (\log_{10} x)(\log_{10} x) = \log_{10}(100) + \log_{10}(x) \\
&\Longleftrightarrow \quad (\log_{10} x)^2 - \log_{10}(x) - 2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (\log_{10} x - 2)(\log_{10}(x) + 1) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \log_{10} x = 2 \quad \text{oder} \quad \log_{10}(x) = -1 \\
&\Longleftrightarrow \quad x = 100 \quad \text{oder} \quad x = 10^{-1} = \tfrac{1}{10}.
\end{aligned}$$

c) Die Identität $\log_2(\sqrt{7} - \sqrt{3}) = 2 - \log_2(\sqrt{7} + \sqrt{3})$ folgt sofort aus

$$\log_2(\sqrt{7} - \sqrt{3}) + \log_2(\sqrt{7} + \sqrt{3}) = \log_2\big((\sqrt{7} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3})\big) = \log_2(7 - 3) = \log_2(4) = 2.$$

Aufgabe 4

a) **(i)** Die Reihe lässt sich als Differenz zweier Potenzreihen darstellen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!}\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1-2}{(n+1)!}\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!}\, z^n\,.$$

Die erste Reihe ergibt $\exp(z)$, die zweite liefert für $z = 0$ den Wert 2 und für $z \neq 0$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!}\, z^n = \frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\, z^{n+1} = \frac{2}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \frac{2}{z}\big(\exp(z) - 1\big)\,.$$

Insgesamt folgt: Die von $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!}\, z^n$ dargestellte Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$f(0) = \exp(0) - 2 = -1\,, \qquad f(z) = \exp(z) - \frac{2\exp(z) - 2}{z} = \frac{(z-2)\exp(z) + 2}{z} \quad (z \neq 0)\,.$$

(ii) Hier ergibt sich gemäß der Reihendarstellung der Sinus-Funktion für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+2} = (z+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+1} = (z+1)\sin(z+1)\,.$$

b) **(i)** Die Reihenentwicklung läßt sich hier mit Hilfe der geometrischen Reihe ($\frac{1}{1-\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n$ für alle $\xi \in \mathbb{C}$ mit $|\xi| < 1$) ermitteln. Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$ gilt

$$\frac{1}{1+3z} = \frac{1}{1+3(z-2)+6} = \frac{1}{7+3(z-2)} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1 - \frac{-3}{7}(z-2)}.$$

Damit erhalten wir für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\left|\frac{-3}{7}(z-2)\right| < 1$ (d. h. für alle $z \in U_{\frac{7}{3}}(2)$)

$$\frac{1}{1+3z} = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1-\frac{-3}{7}(z-2)} = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-3}{7}\right)^n(z-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{7}\left(\frac{-3}{7}\right)^n(z-2)^n.$$

Wegen $\sqrt[n]{\left|\frac{1}{7}\left(\frac{-3}{7}\right)^n\right|} = \frac{1}{\sqrt[n]{7}}\cdot\frac{3}{7} \xrightarrow{n\to\infty} 1\cdot\frac{3}{7} = \frac{3}{7}$ hat die Potenzreihe den Konvergenzradius $\frac{1}{\frac{3}{7}} = \frac{7}{3}$ (vgl. mit dem Konvergenzradius der geometrischen Reihe!).

(ii) Wir bestimmen zunächst wie im Hinweis angegeben, Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ so, daß gilt:

$$\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z} \text{ („Partialbruchzerlegung“).}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung läßt sich als

$$\frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z} = \frac{a(1-2z)+b(1+z)}{(1+z)(1-2z)} = \frac{a+b+(-2a+b)z}{1-z-2z^2} \text{ schreiben.}$$

Die Darstellung gelingt also, wenn $a+b=1$ und $-2a+b=-1$ gilt. Dies bedeutet $a=\frac{2}{3}$ und $b=\frac{1}{3}$.

Für jedes $z \in \mathbb{C}\setminus\{-1,\frac{1}{2}\}$ erhalten wir damit

$$f(z) = \frac{2/3}{3+(z-2)} + \frac{1/3}{-3-2(z-2)} = \frac{2/9}{1+(z-2)/3} + \frac{-1/9}{1+2(z-2)/3}.$$

Für $\frac{1}{3}|z-2| < 1$ gilt

$$\frac{1}{1+(z-2)/3} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{3}\right)^n$$

und für $\frac{2}{3}|z-2| < 1$ ist

$$\frac{1}{1+2(z-2)/3} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2(z-2)}{3}\right)^n.$$

Hiermit folgt für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-2| < \frac{3}{2}$

$$f(z) = \frac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{3}\right)^n - \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2(z-2)}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-2)^n$$

mit $a_n = \frac{2}{9}(-\frac{1}{3})^n - \frac{1}{9}(-\frac{2}{3})^n = (-\frac{1}{3})^{n+2}(2-2^n)$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Schließlich bestimmen wir noch den Konvergenzradius.

Es gilt $|a_n| = \left|(-\frac{1}{3})^{n+2}(2-2^n)\right| = \frac{1}{9}\left|\frac{2-2^n}{3^n}\right| = \frac{1}{9}\cdot\frac{2^n-2}{3^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir betrachten zunächst die Folge $(\sqrt[n]{2^n-2})_n$. Es gilt $2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1} \geq 2$ für $n = 2,3,4,\ldots$. Daraus folgt $2^{n-1} \leq 2^n - 2 \leq 2^n$ für $n = 2,3,4,\ldots$ und daraus erhalten wir mit dem Sandwich-Theorem $\sqrt[n]{2^n-2} \xrightarrow{n\to\infty} 2$. Schließlich folgt daraus $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{3}$. Daher beträgt der Konvergenzradius der Potenzreihe $\frac{3}{2}$.

Aufgabe 5

a) Für $a_n := (2n+1)/(n-1)^2$ gilt

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2n+1}{(n-1)^2}\cdot\frac{n^2}{2n+3} = \frac{2+1/n}{(1-1/n)^2}\cdot\frac{1}{2+3/n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{2} = 1.$$

Die Potenzreihe hat daher den Konvergenzradius 1. Also liegt für $|x-5| < 1$, d.h. $4 < x < 6$, Konvergenz und für $|x-5| > 1$, d.h. $x < 4$ oder $6 < x$, Divergenz der Reihe vor. Wir müssen

nun noch die Ränder des Konvergenzintervalls $|x-5|=1$, also $x=4$ und $x=6$, untersuchen. Dies liefert die zwei Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}(-1)^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}\,.$$

Die Konvergenz der ersten Reihe wird durch das Leibnizkriterium garantiert, denn

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2} \geqslant \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{2n+3}{n^2} = a_{n+1}\,.$$

Die zweite Reihe hingegen divergiert wegen $a_n \geqslant 2n/n^2 = 2/n$ und des Minorantenkriteriums. Insgesamt: Die Potenzreihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}\,(x-5)^n$ konvergiert genau für $x \in [4,6)$.

b) Wegen $\sqrt[n]{|1/n^n|} = 1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ hat diese Potenzreihe den Konvergenzradius ∞, d. h. sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

c) Wir schreiben $y=(z+1)^2$ und untersuchen die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{2^n}\,y^n$. Wegen

$$\frac{\dfrac{3^{n^2}}{2^n}}{\dfrac{3^{(n+1)^2}}{2^{n+1}}} = \frac{3^{n^2}}{2^n} \cdot \frac{2^{n+1}}{3^{n^2+2n+1}} = \frac{2}{3^{2n+1}} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

hat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{2^n}\,y^n$ den Konvergenzradius 0, so dass diese Potenzreihe nur für $y=0$ konvergiert. Damit ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{2^n}\,(z+1)^{2n}$ nur für $z=-1$ konvergent.

d) Für $a_n := 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ gilt offenbar $1 \leqslant a_n \leqslant n$. Wegen $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ folgt hieraus $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ hat also den Konvergenzradius $R=1^{-1}=1$. Für $|z|=1$ konvergiert die Reihe nicht, denn dann gilt $|a_n z^n| = a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, d. h. die Reihenglieder konvergieren nicht gegen 0. Konvergenz der Reihe liegt also nur für $|z|<1$ vor.

e) Wir verwenden das Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(-8)^n}{\sqrt{n}}\,x^{3n+1}\right|} = \frac{8}{(\sqrt[n]{n})^{1/2}}\,|x^3|\,\sqrt[n]{|x|} \xrightarrow{n\to\infty} 8|x|^3\,.$$

Deshalb ist die gegebene Potenzreihe für $8|x|^3<1$, d.h. $|x|<\frac{1}{2}$, konvergent und für $8|x|^3>1$, d.h. $|x|>\frac{1}{2}$, divergent. Untersuchung der Randpunkte: Im Fall $x=\frac{1}{2}$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-8)^n}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{8}\right)^n \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\,.$$

Da $(1/\sqrt{n})$ eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die Reihe nach dem Leibnizkriterium. Im Fall $x=-\frac{1}{2}$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-8)^n}{\sqrt{n}}\left(-\frac{1}{8}\right)^n\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Hier liegt keine Konvergenz vor (die harmonische Reihe ist eine divergente Minorante). Also konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-8)^n}{\sqrt{n}}\,x^{3n+1}$ genau für $-\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{1}{2}$.

f) Diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius 1, denn

$$\sqrt[k]{\left|2^k z^{k^2}\right|} = \sqrt[k]{2^k}\cdot\sqrt[k]{|z|^{k^2}} = 2|z|^k \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} 0, & |z|<1, \\ \infty, & |z|>1. \end{cases}$$

Auf dem Rand des Konvergenzkreises liegt keine Konvergenz vor, denn für $|z|=1$ gilt $|2^k z^{k^2}| = 2^k \nrightarrow 0$ $(k\to\infty)$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{k^2}$ konvergiert somit nur für $|z|<1$.

Aufgabe 6 (P)

a) Da $\liminf a_n$ ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, gibt es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \liminf a_n =: a$. Da $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(b_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ von $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, d.h. es existiert $b \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{l\to\infty} b_{n_{k_l}} = b$. Damit folgt

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leqslant \lim_{l\to\infty}(a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) = a + b \leqslant a + \limsup_{n\to\infty} b_n = \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n\,.$$

Die zweite Ungleichung beweist man analog: Da $\limsup b_n$ ein Häufungspunkt von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, gibt es eine Teilfolge $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} b_{n_k} = \limsup b_n =: b$. Da $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(a_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ von $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, d.h. es existiert $a \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{l\to\infty} a_{n_{k_l}} = a$. Damit folgt

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geqslant \lim_{l\to\infty}(a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) = a + b \geqslant \liminf_{n\to\infty} a_n + b = \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n\,.$$

b) Sei $(a_{n_k} b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} b_{n_k} = \limsup_{n\to\infty}(a_n b_n)$. Da $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(a_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ von $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, d.h. es existiert $a \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{l\to\infty} a_{n_{k_l}} = a$. Da die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, konvergiert auch jede Teilfolge von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\lim_{n\to\infty} b_n$; insbesondere ist $\lim_{l\to\infty} b_{n_{k_l}} = \lim_{n\to\infty} b_n$. Es folgt

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{l\to\infty}(a_{n_{k_l}} b_{n_{k_l}}) = a \cdot \lim_{l\to\infty} b_{n_{k_l}} = a \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

Bei der letzten Ungleichung verwendeten wir $\lim_{n\to\infty} b_n \geqslant 0$. Sei nun $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = \limsup_{n\to\infty} a_n$. Dann ergibt sich

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{j\to\infty} a_{n_j} \cdot \lim_{j\to\infty} b_{n_j} = \lim_{j\to\infty}(a_{n_j} b_{n_j}) \leqslant \limsup_{n\to\infty}(a_n b_n)\,,$$

weil $(a_{n_j} b_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ als konvergente Teilfolge von $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Häufungspunkt von $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n)$ der größte Häufungspunkt von $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.