Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
4.2.2016

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 1: Die Summe $A+C$ ist nicht definiert, weil die Spaltenanzahl von A und C nicht übereinstimmt. Auch das Produkt CB ist undefiniert, denn bei Matrizenprodukten muss die Anzahl der Spalten des ersten Faktors gleich der Anzahl der Zeilen des zweiten Faktors sein. Alle anderen Ausdrücke können wir berechnen:

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 & 2i & 2 \\ 1 & 0 & 3-i \\ 2+i & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3C = \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 3 & -3i \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2+i & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3i & -3-5i & 6+6i \\ 1 & 2-3i & 2 \\ 6+i & -12-2i & 14+3i \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2+i & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+3i & 12+2i & -11-i \\ 6+2i & 7+3i & -8+i \\ 0 & 3 & 3-3i \end{pmatrix}$$

$$(A+B)C = \begin{pmatrix} 3 & 2i & 2 \\ 1 & 0 & 3-i \\ 2+i & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+5i & 6 \\ 6-i & 6-2i \\ 2i & -6-7i \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Insbesondere gilt $AB \neq BA$, d.h. Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ.

Aufgabe 2: Zuerst bestimmen wir die Darstellungsmatrix F von ϕ bzgl. der Standardbasis e_1, e_2, e_3 in Argument- und Zielraum:

$$\begin{aligned} \phi(e_1) &= \phi(1) = 1 + x + x^2 = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3, \\ \phi(e_2) &= \phi(x) = 2x + x^2 = 0 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3, \\ \phi(e_3) &= \phi(1) = 1 + 3x^2 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3, \end{aligned}$$

d.h. die Darstellungsmatrix F ist durch

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben.
Zunächst bestimmen wir die Darstellungsmatrix B von Id bzgl. der Basis b_1, b_2, b_3 im Argumentraum und Standardbasis im Zielraum:

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}(b_1) &= 1 - x = 1 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3, \\ \mathrm{Id}(b_2) &= 1 - x^2 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 - 1 \cdot e_3, \end{aligned}$$

$$\mathrm{Id}(b_3) = 1 + x - x = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 - 1 \cdot e_3,$$

d.h. die Darstellungsmatrix B ist durch

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben.
Wir invertieren B (vgl. mit Abschnitt 15.16):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

d.h.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach Abschnitt 15.16 ist die Darstellungsmatrix A von ϕ bzgl. der Basis b_1, b_2, b_3 in Argument- und Zielraum durch

$$A = B^{-1} F B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Aufgabe 3:

(a) Per Definition ist

$$\begin{aligned} \|\vec{a}\| &= \sqrt{(\vec{a}|\vec{a})} = \sqrt{(1-i)\overline{(1-i)} + (2+3i)\overline{(2+3i)} + (4-6i)\overline{(4-6i)} + 1 \cdot \overline{1}} \\ &= \sqrt{(1-i)(1+i) + (2+3i)(2-3i) + (4-6i)(4+6i) + 1 \cdot 1} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \|\vec{b}\| &= \sqrt{(\vec{b}|\vec{b})} = \sqrt{(2+3i)\overline{(2+3i)} + (4-2i)\overline{(4-2i)} + (1+i)\overline{(1+i)} + (1+i)\overline{(1+i)}} \\ &= \sqrt{(2+3i)(2-3i) + (4-2i)(4+2i) + (1+i)(1-i) + (1+i)(1-i)} = \sqrt{37}. \end{aligned}$$

(b) Da

$$\begin{aligned} (\vec{a}|\vec{b}) &= (\vec{a}|\vec{b}) = (1-i)\overline{(2+3i)} + (2+3i)\overline{(4-2i)} + (4-6i)\overline{(1+i)} + 1 \cdot \overline{(1+i)} \\ &= (1-i)(2-3i) + (2+3i)(4+2i) + (4-6i)(1-i) + 1 \cdot (1-i) \\ &= 0 + 0 \cdot i = 0 \end{aligned}$$

sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal.