Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
11.1.2016

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 11. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1:

(a) Es sei $f \in C^0([a,b])$ mit $\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$.

Annahme: Es existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \neq 0$.
Betrachte die Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto h(x) := |f(x)|$. Dann ist h als Komposition stetiger Funktionen stetig und es gilt $h(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ sowie $h(x_0) = |f(x_0)| > 0$. Daher liefert Aufgabe 4 (a) des 10. Übungsblattes

$$0 < \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$. Demnach ist die Annahme falsch und es gibt kein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \neq 0$, d.h. für alle $x \in [a,b]$ gilt $f(x) = 0$.

(b) Nun sei $f \in C^0([a,b])$ und für alle $g \in C^0([a,b])$ gelte $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$.

Speziell für $f = g$ gilt $\int_a^b (f(x))^2\,dx = 0$. Da die Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto h(x) := (f(x))^2$ stetig ist und $\int_a^b |h(x)|\,dx = 0$ gilt, liefert Teil (a): $0 = h(x) = (f(x))^2$ für alle $x \in [a,b]$, also $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.

Aufgabe 2:

(a) Wir betrachten die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^x \sin(e^t)\,dt$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x)$.
Dann ist f nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = \sin(e^x)$. Bekanntlich ist auch g auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) = \cos(x)$. Wegen $F(x) = f(g(x)) - f(x)$ liefert die Kettenregel, dass F auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit

$$F'(x) = f'(g(x))\,g'(x) - f'(x) = \sin(e^{\sin(x)})\,\cos(x) - \sin(e^x) \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^x (1+4t)e^{t^2}\,dt$ ist nach dem Hauptsatz auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. Daher ist f als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = (1+4x)e^{x^2} + e^{x^2} + xe^{x^2} \cdot 2x = (2 + 4x + 2x^2)e^{x^2} = 2(1+x)^2\,e^{x^2}\,.$$

Also gilt $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = -1$ ist. Wegen $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ wechselt f' in -1 das Vorzeichen nicht, so dass in -1 keine lokale Extremstelle von f vorliegt. Folglich besitzt f auf $\mathbb{R}$ keine lokalen Extremstellen.

Aufgabe 3:

(i) Wegen $(\sin^2 x)' = 2\sin x\,\cos x$ ist $\frac{1}{2}\sin^2 x$ eine Stammfunktion von $\sin x\,\cos x$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x\Big|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\Big(\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin^2(0)\Big) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}\,.$$

(ii) Sei $k \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten zunächst das Integral ohne Betrag:

$$\begin{aligned}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin x\,dx &= -\cos x\Big|_{x=(k-1)\pi}^{k\pi} = -\cos(k\pi) + \cos\big((k-1)\pi\big)\\ &= -(-1)^k + (-1)^{k-1} = (-(-1)+1)(-1)^{k-1} = 2(-1)^{k-1}\,.\end{aligned}$$

Da die Sinusfunktion ihre Nullstellen genau in $k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ hat und stetig ist, ist sin auf dem ganzen Intervall $[(k-1)\pi, k\pi]$ entweder ≥ 0 oder ≤ 0. Folglich gilt

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\ dx = \left|\ \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin x\,dx\right| = 2\,.$$

(iii) Scharfes Hinsehen liefert, dass $x \mapsto f(x) := \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$ eine Stammfunktion von $x \mapsto f'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ ist. Daher bietet es sich an, die Regel der Partiellen Integration mit $f(x)$ wie oben und $g(x) = x^2$ für alle $x \in [1,2]$ anzuwenden:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx &= \int_1^2 \underbrace{\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}}_{=f'(x)} \cdot \underbrace{x^2}_{=g(x)}\,dx = \underbrace{\frac{-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}_{=f(x)\cdot g(x)}\Big|_{x=1}^{2} - \int_1^2 \underbrace{\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}}_{=f(x)} \cdot \underbrace{2x}_{=g'(x)}\,dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{5}} + 2\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx\end{aligned}$$

Ein weiteres scharfes Hinsehen liefert, dass $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ eine Stammfunktion des letzten Integranden ist. Damit folgt:

$$\int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dt = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4\sqrt{5}}{5} + 2\sqrt{1+x^2}\Big|_{x=1}^{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4\sqrt{5}}{5} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2} = \frac{6\sqrt{5}}{5} - \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(iv) Mit der Definition von cosh und sinh ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\ln(3)}{2}}^{\frac{\ln(7)}{2}} \frac{1}{\sinh(x)\cosh(x)}dx &= \int_{\frac{\ln(3)}{2}}^{\frac{\ln(7)}{2}} \frac{1}{\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}}dx\\ &= \int_{\frac{\ln(3)}{2}}^{\frac{\ln(7)}{2}} \frac{4}{e^{2x}-e^{-2x}}dx = \int_{\frac{\ln(3)}{2}}^{\frac{\ln(7)}{2}} \frac{4e^{2x}}{e^{4x}-1}dx\end{aligned}$$

Es bietet sich daher die Substitution $t = e^{2x}$ an. Dann ist $dt = 2e^{2x}\,dx$ und wegen $x \in \left[\frac{\ln(3)}{2}, \frac{\ln(7)}{2}\right]$ ist $t \in [3,7]$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\frac{\ln(3)}{2}}^{\frac{\ln(7)}{2}} \frac{4e^{2x}}{e^{4x}-1}dx &= \int\limits_3^7 \frac{2}{t^2-1}dt = \int\limits_3^7 \frac{2}{(t-1)(t+1)}dt = \int\limits_3^7 \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}dt \\
&= \Big(\ln(t-1) - \ln(t+1)\Big)\Big|_{t=3}^7 = \ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\Big|_{t=3}^7 \\
&= \ln\left(\frac{3}{4}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

(v) Wir substituieren zunächst $t = \sqrt{x}$, d.h. $x = t^2$. Dann ist $dx = 2t\,dt$ und aus $x \in [1,4]$ ergibt sich $t \in [1,2]$

$$\int\limits_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)\,dx = \int\limits_1^2 \arctan(\sqrt{t-1}\,)\cdot 2t\,dt.$$

Nun substituieren wir $u = \sqrt{t-1}$, also $t = u^2+1$, $dt = 2u\,du$, $t \in [1,2]$ wird zu $u \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\int\limits_1^2 \arctan(\sqrt{t-1}\,)\cdot 2t\,dt &= \int\limits_0^1 \arctan(u)\cdot 2(u^2+1)\cdot 2u\,du \\
&= \int\limits_0^1 (4u^3+4u)\ \arctan(u)\,du\,.
\end{aligned}$$

Dann führen wir eine partielle Integration aus mit $f(u) = \arctan(u)$ und $g'(u) = 4u^3+4u$:

$$\begin{aligned}
&= (u^4+2u^2)\arctan(u)\Big|_{u=0}^1 - \int\limits_0^1 (u^4+2u^2)\frac{1}{1+u^2}\,du \\
&= 3\ \arctan(1) - \int\limits_0^1 \frac{(u^2+1)^2-1}{1+u^2}\,du = \tfrac{3}{4}\pi - \int\limits_0^1 (u^2+1)\,du + \int\limits_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,du \\
&= \tfrac{3}{4}\pi - (\tfrac{1}{3}u^3+u)\Big|_{u=0}^1 + \arctan(u)\Big|_{u=0}^1 = \tfrac{3}{4}\pi - \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{4}\pi = \pi - \tfrac{4}{3}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4:

(i) Mit der Substitution $t = \sqrt{x}$ gilt $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, also $dx = 2\sqrt{x}dt = 2tdt$. Somit folgt

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\int te^t dt.$$

Das letzte Integral berechnen wir über partielle Integration. Es gilt

$$\int \underbrace{t}_{=:f(t)}\ \underbrace{e^t}_{=:g'(t)}\,dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C = (t-1)e^t + C,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ beliebig. Somit folgt insgesamt

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C$$

für $x > 0$.

(ii) Wir verwenden partielle Integration mit $f(x) = \arcsin(x)$ und $g'(x) = 1$:

$$\begin{aligned}\int \arcsin(x)\,dx &= \int 1 \cdot \arcsin(x)\,dx = x\arcsin(x) - \int x \arcsin'(x)\,dx \\ &= x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C \\ &= x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C \qquad \forall x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ beliebig.

Aufgabe 5:

(i) Aus den Additionstheoremen folgt $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big)$. Damit erhalten wir für $|k| \neq |l|$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin(kx)\cdot\sin(lx)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big(\cos\big((k-l)x\big) - \cos\big((k+l)x\big)\Big)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sin\big((k-l)x\big)}{k-l}\Big|_{x=0}^{2\pi} - \frac{1}{2}\frac{\sin\big((k+l)x\big)}{k+l}\Big|_{x=0}^{2\pi} \;=\; 0.\end{aligned}$$

Für $k = l \neq 0$ ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\cdot\sin(lx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2kx)\,dx \;=\; \pi.$$

Für $k = -l \neq 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin(kx)\cdot\sin(lx)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2kx)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1\,dx \\ &= -\pi.\end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich für $k = l = 0$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\cdot\sin(lx)\,dx = 0.$$

(ii) Wegen $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\big)$ ergibt sich analog

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cdot\sin(lx)\,dx = 0 \qquad \text{für alle } k, l \in \mathbb{Z}.$$

(iii) Wegen $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\big)$ ergibt sich schließlich analog

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cdot\cos(lx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } |k| \neq |l|, \\ \pi & \text{für } |k| = |l| \neq 0, \\ 2\pi & \text{für } k = l = 0. \end{cases}$$