Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
11.1.2016

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 12. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1:

(i) Seien $s < 0$ und $t \in \mathbb{R}$ fest. Mit partieller Integration erhalten wir für jedes $R > 0$

$$\int_0^R e^{sx}\cos(tx)\,dx = \frac{e^{sx}}{s}\cdot\cos(tx)\Big|_{x=0}^{R} + \int_0^R \frac{e^{sx}}{s}\cdot t\sin(tx)\,dx\,.$$

Erneute partielle Integration liefert für das letzte Integral

$$\int_0^R \frac{e^{sx}}{s}\cdot t\sin(tx)\,dx = \frac{e^{sx}}{s^2}\cdot t\sin(tx)\Big|_{x=0}^{R} - \int_0^R \frac{e^{sx}}{s^2}\cdot t^2\cos(tx)\,dx\,.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{t^2}{s^2}\right)\int_0^R e^{sx}\cos(tx)\,dx &= \frac{e^{sx}}{s}\cos(tx)\Big|_{x=0}^{R} + \frac{e^{sx}}{s^2}\,t\sin(tx)\Big|_{x=0}^{R}\\ &= \frac{e^{sR}}{s}\cos(tR) - \frac{1}{s} + \frac{e^{sR}}{s^2}\,t\sin(tR) - 0 \xrightarrow{R\to\infty} -\frac{1}{s}\,.\end{aligned}$$

(Man beachte $s < 0$.) Also konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx$ und es gilt

$$\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx = -\frac{1}{s}\left(1+\frac{t^2}{s^2}\right)^{-1} = -\frac{s}{s^2+t^2}\,.$$

(ii) Nach der Definition aus Abschnitt 14.1 der Vorlesung ist das uneigentliche Integral $\int_{-1}^{1}\ln(|x|)dx$ genau dann konvergent, wenn die beiden uneigentlichen Integrale $\int_{-1}^{0}\ln(|x|)dx$ und $\int_0^1 \ln(|x|)\mathrm{d}x$ konvergent sind. In diesem Fall ist

$$\int_{-1}^{1}\ln(|x|)dx = \int_{-1}^{0}\ln(|x|)dx + \int_0^1\ln(|x|)dx.$$

Sei $0 < a < 1$. Wegen

$$\int_{-1}^{-a} \ln(|x|)dx \overset{s=-x}{=} \int_a^1 \ln(|s|)\mathrm{d}s = \int_a^1 \ln(|x|)dx$$

reicht es, nur eins der beiden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz zu untersuchen. Partielle Integration liefert

$$\int_a^1 \ln(x)dx = \big(x\ln(x) - x\big)\Big|_{x=a}^1 = (-1 - a\ln(a) + a)$$

sowie

$$\lim_{a\to 0+} (a - a\ln(a)) = \lim_{a\to 0+} a\ln\left(\frac{1}{a}\right) = \lim_{a\to 0+} \frac{\ln\left(\frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{a}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\underbrace{x}_{\to\infty}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Folglich ist $\int\limits_0^1 \ln(|x|)dx$ konvergent und es gilt:

$$\int_0^1 \ln(|x|)dx = \lim_{a\to 0+} \int_a^1 \ln(|x|)dx = -1$$

und damit

$$\int_{-1}^1 \ln(|x|)dx = -2.$$

(iii) Da

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-\alpha}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\alpha} x^\alpha = 0$$

gilt insbesondere

$$x^{1/2}\big(\ln(x)\big)^4 = \big((x^{1/8}\ln(x)\big)^4 \xrightarrow{x\to 0^+} 0\,.$$

Mit einem gewissen $\varepsilon > 0$ besteht daher für alle $x \in (0, \varepsilon]$ die Abschätzung

$$\left|x^{1/2}\big(\ln(x)\big)^4\right| \le 1\,, \qquad \text{also} \qquad \left|\big(\ln(x)\big)^4\right| \le x^{-1/2}\,.$$

Mit Hilfe des Majorantenkriteriums folgt daraus die Konvergenz von $\int\limits_0^\varepsilon \big((\ln(x)\big)^4\, dx$, also auch die Konvergenz von $\int\limits_0^1 \big(\ln(x)\big)^4\, dx = \int\limits_0^\varepsilon \big(\ln(x)\big)^4\, dx + \int\limits_\varepsilon^1 \big(\ln(x)\big)^4\, dx$.

Um den Wert des uneigentlichen Integrals auszurechnen, bestimmen wir durch mehrmalige partielle Integration eine Stammfunktion von $x \mapsto \ln(x)^4$

$$\begin{aligned}\int \big(\ln(x)\big)^4\,dx &= x\cdot\big(\ln(x)\big)^4 - \int x\cdot\frac{4\big(\ln(x)\big)^3}{x}\,dx\\ &= x\cdot\big(\ln(x)\big)^4 - 4x\cdot\big(\ln(x)\big)^3 + 12\int\big(\ln(x)\big)^2\,dx\\ &= x\cdot\big(\ln(x)\big)^4 - 4x\cdot\big(\ln(x)\big)^3 + 12x\cdot\big(\ln(x)\big)^2 - 24\int\ln(x)\,dx\\ &= x\cdot\big(\ln(x)\big)^4 - 4x\cdot\big(\ln(x)\big)^3 + 12x\cdot\big(\ln(x)\big)^2 - 24x\cdot\ln(x) + 24x + C,\end{aligned}$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ beliebig. Also gilt für jedes $\varepsilon \in (0,1)$

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 \big(\ln(x)\big)^4\,dx &= \Big(x\cdot\big(\ln(x)\big)^4 - 4x\cdot\big(\ln(x)\big)^3 + 12x\cdot\big(\ln(x)\big)^2 - 24x\cdot\ln(x) + 24x\Big)\Big|_\varepsilon^1\\ &= 24 - \varepsilon\cdot\big(\ln(\varepsilon)\big)^4 + 4\varepsilon\cdot\big(\ln(\varepsilon)\big)^3 - 12\varepsilon\cdot\big(\ln(\varepsilon)\big)^2 + 24\varepsilon\cdot\ln(\varepsilon) - 24\varepsilon\\ &\xrightarrow{\varepsilon\to 0+} 24\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Wir zeigen zunächst, dass das uneigentliche Integral $I_0(1)$ konvergiert und dass sein Wert $= 1$ ist:

$$I_0(1) = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\big(-e^{-x}\big)\Big|_{x=0}^R = \lim_{R\to\infty}\Big(-e^{-R} + e^{-0}\Big) = 1\,.$$

Nun sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}I_n(1) &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R x^n e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\Big(x^n(-e^{-x})\Big|_{x=0}^R - \int_0^R nx^{n-1}(-e^{-x})\,dx\Big)\\ &= \lim_{R\to\infty}(-R^n e^{-R}) + nI_{n-1}(1) = nI_{n-1}(1)\,. \qquad (*)\end{aligned}$$

Aus dieser Rekursionsformel folgt per vollständiger Induktion, dass das Integral $I_n(1)$ konvergiert mit Wert $n!$ für alle $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$:

IA: $n = 0$. Zu Beginn haben wir gesehen, dass $I_0(1)$ konvergiert und dass $I_0(1) = 1 = 0!$ gilt.

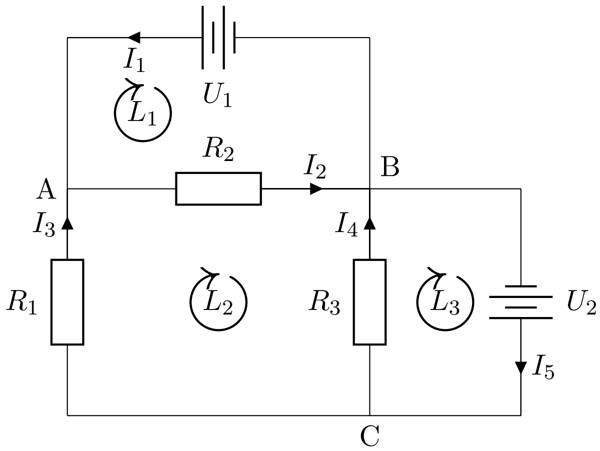
IS: Sei $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Das Integral $I_n(1)$ konvergiere und es gelte $I_n(1) = n!$ (IV). Damit ergibt sich

$$I_{n+1}(1) \overset{(*)}{=} (n+1)I_n(1) \overset{\text{(IV)}}{=} (n+1)n! = (n+1)!\,.$$

Für jedes $\lambda > 0$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ führt die Substitution $y = \lambda x, dy = \lambda\, dx$ auf

$$I_n(\lambda) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R x^n e^{-\lambda x}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\lambda R} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^n e^{-y} \frac{dy}{\lambda} = \lambda^{-(n+1)} \lim_{R\to\infty} \int_0^{\lambda R} y^n e^{-y}\, dy$$
$$= \lambda^{-(n+1)} I_n(1) = \frac{n!}{\lambda^{n+1}} \,.$$

Aufgabe 3:



Durch Betrachtung der Knoten A, B, C bzw. der Maschen L_1, L_2, L_3 erhalten wir

$$\begin{aligned}
I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \\
-I_1 + I_2 + I_4 - I_5 &= 0 \\
-I_3 - I_4 + I_5 &= 0 \\
\frac{20}{3} - 4I_2 &= 0 \\
4I_2 - 6I_4 + 2I_3 &= 0 \\
-20 + 6I_4 &= 0
\end{aligned}$$

und dies ist äquivalent zu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix}}_{=:\vec{I}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{20}{3} \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}}_{=:\vec{b}}$$

Um dieses System zu lösen, bringen wir die Matrix A auf ihre Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -\frac{20}{3} \\ 0 & 4 & 2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 20 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ + \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -\frac{20}{3} \\ 0 & 4 & 2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 20 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ + \\ \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -\frac{20}{3} \\ 0 & 4 & 2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 20 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -\frac{20}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ + \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -\frac{20}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 0 & -\frac{20}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-2) \\ \\ + \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -\frac{20}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 2 & -\frac{20}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot\frac{8}{6} \\ + \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -\frac{20}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

d.h.

$$A\vec{I} = \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{20}{3} \\ 0 \\ 20 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Durch Ruckwärtseinsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} 2I_5 &= 20 &\Rightarrow\quad I_5 &= 10 \\ 6I_4 &= 20 &\Rightarrow\quad I_4 &= \frac{10}{3} \\ I_3 + I_4 - I_5 &= 0 &\Rightarrow\quad I_3 &= \frac{20}{3} \\ -4I_2 &= -\frac{20}{3} &\Rightarrow\quad I_2 &= \frac{5}{3} \\ I_1 - I_2 + I_3 &= 0 &\Rightarrow\quad I_1 &= -5 \end{aligned}$$