Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
27.1.2016

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 13. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1:

(a) Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ und der Nullvektor $0 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 =: u$ sei als eine Linearkombination von u_1, u_2 geschrieben. Wir haben zu zeigen: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Dazu betrachten wir:

$$\begin{aligned} 0 = u(0) &= \alpha_1 u_1(0) + \alpha_2 u_2(0) = \alpha_1 \underbrace{e^{-\gamma \cdot 0}}_{=1} \underbrace{\cosh(\kappa \cdot 0)}_{=1} + \alpha_2 e^{-\gamma \cdot 0} \frac{1}{\kappa} \underbrace{\sinh(\kappa \cdot 0)}_{=0} = \alpha_1 \\ 0 = u'(0) &= \underbrace{\alpha_1}_{=0} u_1'(0) + \alpha_2 u_2'(0) = \alpha_2 \left(\underbrace{e^{-\gamma \cdot 0}}_{=1} \underbrace{\cosh(\kappa \cdot 0)}_{=1} - \frac{\gamma}{\kappa} e^{-\gamma \cdot 0} \underbrace{\sinh(\kappa \cdot 0)}_{=0} \right) = \alpha_2 \end{aligned}$$

(b) Wir zeigen zunächst $U := \operatorname{lin}(\{u_1, u_2\}) \subseteq V := \operatorname{lin}(\{v_1, v_2\})$: Sei dazu $u \in U$ beliebig. Es existieren dann $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} u(t) &= \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) = \alpha_1 e^{-\gamma t} \cosh(\kappa t) + \alpha_2 e^{-\gamma t} \frac{1}{\kappa} \sinh(\kappa t) \\ &= \alpha_1 e^{-\gamma t} \left(\frac{e^{\kappa t} + e^{-\kappa t}}{2} \right) + \frac{\alpha_2}{\kappa} e^{-\gamma t} \left(\frac{e^{\kappa t} - e^{-\kappa t}}{2} \right) \\ &= e^{-\gamma t} \left(\frac{\kappa \alpha_1 + \alpha_2}{2\kappa} e^{\kappa t} + \frac{\kappa \alpha_1 - \alpha_2}{2\kappa} e^{-\kappa t} \right) = \underbrace{\frac{\kappa \alpha_1 + \alpha_2}{2\kappa}}_{=:\beta_1} e^{(-\gamma + \kappa)t} + \underbrace{\frac{\kappa \alpha_1 - \alpha_2}{2\kappa}}_{=:\beta_2} e^{(-\gamma - \kappa)t} \\ &= \beta_1 v_1(t) + \beta_2 v_2(t) \end{aligned}$$

Also ist u auch eine Linearkombination der v_1, v_2. Da u beliebig war, gilt in der Tat $U \subseteq V$ und damit $\dim U \leq \dim V$. Nach Teilaufgabe (a) ist $\{u_1, u_2\}$ linear unabhängig. Folglich ist $\dim U = 2$. Da $\dim V \leq 2$ und $U \subseteq V$, muss $U = V$ gelten.

Aufgabe 2:

(a) Der Nullvektor in $C([0,1])$ ist die Nullfunktion $n\colon [0,1] \to \mathbb{C}, x \mapsto 0$. Die Funktionen f, g, h sind genau dann linear unabhängig, wenn aus $\alpha f + \beta g + \gamma h = n$ stets $\alpha = \beta = \gamma = 0$ folgt, wenn also aus $\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$ stets $\alpha = \beta = \gamma = 0$ folgt.

Seien also $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ mit $\alpha \cdot 2 + \beta(x-1) + \gamma(x^2 + 3x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$, d.h. $(2\alpha - \beta) + (\beta + 3\gamma)x + \gamma x^2 = 0$ für alle $x \in [0,1]$. Sind $p_k\colon [0,1] \to \mathbb{C}, x \mapsto x^k$ für $k = 0, 1, 2$ definiert, so lässt sich dies schreiben als $(2\alpha - \beta)p_0 + (\beta + 3\gamma)p_1 + \gamma p_2 = n$. Da die Monome p_0, p_1, p_2 in $C([0,1])$ linear unabhängig sind (vgl. Beispiel in 15.9), kann man den Nullvektor, d.h. die Nullfunktion n, nur als triviale Linearkombination von p_0, p_1, p_2 schreiben, so dass $2\alpha - \beta = \beta + 3\gamma = \gamma = 0$ folgt. Hieraus ergibt sich sofort $\gamma = 0$ und daher $\beta + 3 \cdot 0 = 0$, also $\beta = 0$, was schließlich auf $\alpha = 0$ führt. Damit ist die lineare Unabhängigkeit von f, g, h gezeigt.

(b) f, g, h bildet eine Basis von $P_2([0,1]) = \operatorname{lin}(p_0, p_1, p_2)$, weil $\dim P_2([0,1]) = 3$ ist und die drei Funktionen $f, g, h \in P_2([0,1])$ linear unabhängig sind.

(c) Für jedes $x \in [0,1]$ gilt $p(x) = 8x^2+2x+2 = 8(x^2+3x)-22x+2 = 8h(x)-22(x-1)-20 = 8h(x) - 22g(x) - 10f(x)$. Daher ist $p = 8h - 22g - 10f$, so dass die Koordinaten von p bzgl. der Basis f, g, h durch $(-10, -22, 8)$ gegeben sind.

Bemerkung: Die Reihenfolge der Basiselemente ist bei der Angabe der Koordinaten von entscheidender Bedeutung. So lauten beispielsweise die Koordinaten von p bzgl. der Basis g, h, f: $(-22, 8, -10)$.

Aufgabe 3: Um dieses System zu lösen, bestimmen wir die Zeilennormalform der zugehörigen erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3+4i & 4+i & -5 & 11+i \\ -5 & 1-4i & 3-4i & 1-5i \\ 5 & 0 & -3+4i & 1-3i \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \frac{1}{3+4i} \\ + \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{16-13i}{25} & \frac{-3+4i}{5} & \frac{37-41i}{25} \\ 0 & 1-4i & 0 & 2-8i \\ 5 & 0 & -3+4i & 1-3i \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \frac{1}{1-4i} \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{16-13i}{25} & \frac{-3+4i}{5} & \frac{37-41i}{25} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & -3+4i & 1-3i \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \cdot -\frac{16-13i}{25} \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-3+4i}{5} & \frac{1-3i}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & -3+4i & 1-3i \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-5) \\ \\ + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-3+4i}{5} & \frac{1-3i}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir die Lösungmenge ab:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1-3i}{5} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{-3+4i}{5} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{K} \right\}.$$

Aufgabe 4: Zunächst zeigen wir, dass ϕ linear ist. Seien $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \phi(x+y) &= \phi(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \\ &= \begin{pmatrix} (x_1+y_1)+(x_2+y_2) \\ -2(x_1+y_1)+(x_2+y_2)-(x_3+y_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1+x_2)+(y_1+y_2) \\ (-2x_1+x_2-x_3)+(-2y_1+y_2-y_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ -2x_1+x_2-x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1+y_2 \\ -2y_1+y_2-y_3 \end{pmatrix} = \phi(x)+\phi(y) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \phi(\alpha x) = \phi(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) &= \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \alpha x_2 \\ -2\alpha x_1 + \alpha x_2 - \alpha x_3 \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ -2x_1+x_2-x_3 \end{pmatrix} = \alpha\phi(x), \end{aligned}$$

d.h. ϕ ist in der Tat linear.
Für alle $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ -2x_1+x_2-x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Um den Kern ϕ = Kern A zu bestimmen, bringen wir die Matrix A auf ihre Zeilennormalform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 2 \\ + \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot \frac{1}{3} \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir ab

$$\operatorname{Kern}\phi = \operatorname{Kern} A = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ Ax = 0\} = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}\} = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}\}.$$

Wir überlegen uns zunächst die Dimension von $\operatorname{Bild}\phi$. Da ϕ linear ist, gilt nach der Dimensionsformel 15.13 $\dim \operatorname{Bild}\phi + \dim \operatorname{Kern}\phi = \dim R^3 = 3$. Wegen $\dim \operatorname{Kern}\phi = 1$ muss $\dim \operatorname{Bild}\phi = 2$ gelten. Da $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linear ist und $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, muss $\operatorname{Bild}\phi = \mathbb{R}^2$.

Per Definition ist

$$\operatorname{Rang}\phi = \operatorname{Rang} A = \dim \operatorname{Bild} A = 2.$$