Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
21.10.2015

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 1. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1:

(a) Um den ersten Teil einzusehen, betrachten wir eine Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
w	w	w	f	f	f	f	w
w	f	w	f	f	w	f	w
f	w	w	f	w	f	f	w
f	f	f	w	w	w	w	w

D.h. die Aussage $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ ist immer wahr (unabhängig von den Wahrheitswerten von A und B).
Bemerkung: Wegen der Regel "$\neg$ bildet stärker als $\wedge/\vee$; $\wedge/\vee$ bildet stärker als $\Rightarrow$ / $\Leftrightarrow$" (siehe Abschnitt 1.3 der Vorlesung) können einige Klammern weggelassen werden.

Den zweiten Teil der Behauptung liefert die folgende Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
w	w	w	f	f	f	f	w
w	f	f	w	f	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Damit ist auch der zweite Teil der Behauptung gezeigt.
Alternativ können wir benutzen, dass $D \Leftrightarrow \neg(\neg D)$ für jede Aussage D gilt (siehe Abschnitt 1.3 der Vorlesung). Somit erhalten wir

$$\neg A \vee \neg B \;\Leftrightarrow\; \neg\big(\neg(\neg A \vee \neg B)\big).$$

Aufgrund des schon bewiesenen Teils können wir ein $\neg$ "in die Klammer hineinziehen":

$$\neg\big(\neg(\neg A \vee \neg B)\big) \;\Leftrightarrow\; \neg\big(\neg(\neg A) \wedge \neg(\neg B)\big) \;\Leftrightarrow\; \neg(A \wedge B).$$

(b) Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$(A \Rightarrow B) \wedge \neg B$	$\neg A$	$(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	w	f	f	f	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w

(c) Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge A$	$(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

(d) Wahrheitstafel:

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$	$A \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	w
w	f	w	f	w	f	w	w
w	f	f	f	w	f	f	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	f	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Aufgabe 2:

(a) Wahrheitstafel:

A	B	$\neg B$	$A \vee \neg B$	$(A \vee \neg B) \wedge A$
w	w	f	w	w
w	f	w	w	w
f	w	f	f	f
f	f	w	w	f

Somit ist die Aussage weder eine Tautologie noch eine Kontradiktion.

(b) Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$	$\neq (A \wedge B)$	$A \vee \neg(A \wedge B)$
w	w	w	f	w
w	f	f	w	w
f	w	f	w	w
f	f	f	w	w

Somit ist die Aussage eine Tautologie.

(c) Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	$(A \wedge B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	f	w	w	f
f	w	f	w	f	w	f
f	f	f	w	w	w	f

Somit ist die Aussage eine Kontradiktion.

Aufgabe 3:

(a) Die Menge all derer, die in Karlsruhe im ersten Hochschulsemester sind und Physik studieren, lässt sich ausdrücken durch

$$\{x \,:\, x \in S_1 \wedge x \in P\} = S_1 \cap P.$$

(b) Die Menge aller Karlsruher Studierenden, die im ersten oder dritten Hochschulsemester sind, aber nicht Elektrotechnik studieren, ist gleich

$$\{x \,:\, (x \in S_1 \vee x \in S_3) \wedge x \notin E\} = \{x \,:\, x \in S_1 \cup S_3 \wedge x \notin E\} = (S_1 \cup S_3) \setminus E.$$

(c) Die Menge aller Studierenden in Karlsruhe entspricht

$$\{x \,:\, x \in S_1 \vee x \in S_2 \vee x \in S_3 \vee x \in S_4 \vee \ldots\} = \{x \,:\, \exists j \in \mathbb{N} : x \in S_j\} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} S_j.$$

Aufgabe 4: Gegeben seien eine Menge M sowie Teilmengen M_1, M_2, M_3 von M.

(a) Um die Äquivalenz $M_1 \subseteq M_2 \;\Leftrightarrow\; M \setminus M_2 \subseteq M \setminus M_1$ zu zeigen, weisen wir die Gültigkeit der Implikationen $M_1 \subseteq M_2 \;\Rightarrow\; M \setminus M_2 \subseteq M \setminus M_1$ und $M_1 \subseteq M_2 \;\Leftarrow\; M \setminus M_2 \subseteq M \setminus M_1$ nach.
„$\Rightarrow$“: Es gelte $M_1 \subseteq M_2$, sei also jedes Element von M_1 auch in M_2 enthalten. Wir müssen nun zeigen: $M \setminus M_2 \subseteq M \setminus M_1$ (bzw. in Worten: Jedes Element von M, das nicht in M_2 liegt, liegt auch nicht in M_1.)
Jedes Element der Menge $M \setminus M_2$ ist nicht in M_2 und damit erst recht nicht in M_1; folglich liegt es in $M \setminus M_1$. Also gilt $M \setminus M_2 \subseteq M \setminus M_1$.
„$\Leftarrow$“: Es gelte $M \setminus M_2 \subseteq M \setminus M_1$. Zu zeigen ist $M_1 \subseteq M_2$.
Nach der Voraussetzung $M \setminus M_2 \subseteq M \setminus M_1$ liegt jedes Element von M, das nicht in M_2 liegt, auch nicht in M_1. Dann ist notwendigerweise jedes Element von M_1 auch in M_2, da es ja sonst nicht in M_1 liegen würde. Also ist $M_1 \subseteq M_2$.

(b) Es gelte $M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_3$. Um $M_1 \subseteq M_3$ zu zeigen, müssen wir begründen, warum jedes Element aus M_1 auch in M_3 liegt. Sei hierzu $x \in M_1$ beliebig. Wegen $M_1 \subseteq M_2$ liegt x auch in M_2 und aufgrund von $M_2 \subseteq M_3$ ist x auch in M_3 enthalten. Da $x \in M_1$ beliebig war, haben wir eingesehen, dass jedes Element aus M_1 ebenfalls in M_3 liegt, d.h. $M_1 \subseteq M_3$.