Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
28.10.2015

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 2. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1:

(a) Eine injektive Abbildung ist beispielsweise gegeben durch $f_1\colon M \to N$, $2 \mapsto 2, 4 \mapsto 4, 7 \mapsto 8$. Nicht injektiv ist etwa $f_2\colon M \to N$, $2 \mapsto 2, 4 \mapsto 2, 7 \mapsto 8$. Beide Abbildungen sind nicht surjektiv.
Surjektive Abbildungen und damit auch bijektive Abbildungen von M nach N gibt es nicht, weil N mehr Elemente als M enthält.

Aus dem gleichen Grund existiert keine injektive Abbildung von N nach M. Ist beispielsweise $g_1\colon N \to M$, $2 \mapsto 2, 4 \mapsto 2, 8 \mapsto 2$ und $9 \mapsto 7$, so ist g_1 nicht surjektiv. Definiert man z.B. $g_2\colon N \to M$ durch $2 \mapsto 2, 4 \mapsto 2$, $8 \mapsto 4$ und $9 \mapsto 7$, dann ist g_2 surjektiv.

(b) f ist injektiv, denn für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x+4}{x-3} = \frac{y+4}{y-3} \\ &\Leftrightarrow \quad (x+4)(y-3) = (y+4)(x-3) \\ &\Leftrightarrow \quad xy - 3x + 4y - 12 = yx - 3y + 4x - 12 \\ &\Leftrightarrow \quad 7y = 7x \quad \Leftrightarrow \quad x = y. \end{aligned}$$

f ist nicht surjektiv, denn $1 \notin f(\mathbb{R} \setminus \{3\})$. Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ gilt nämlich

$$f(x) = \frac{x - 3 + 3 + 4}{x-3} = 1 + \frac{7}{x-3}.$$

Wegen $\frac{7}{x-3} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ folgt $f(x) \neq 1$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Also gibt es kein $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ mit $f(x) = 1$, d.h. $1 \notin f(\mathbb{R} \setminus \{3\})$.

Aufgabe 2:

(a) (i) Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $|x-2| \cdot |x+2| = \left|x^2 - 4\right|$ und damit $|x-2| \cdot |x+2| = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4 \in \{-2, 2\}$. Ferner gilt

$$x^2 - 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right\}$$

sowie

$$x^2 - 4 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}.$$

Damit ist die Lösungsmenge $M = \left\{-\sqrt{6}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{6}\right\}$.

(ii) Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $\left|x^2 - 4\right| = |x-2|\,|x+2|$. Für $x = -2$ ist die Ungleichung erfüllt. Sei also im Weiteren $x \neq -2$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \left|x^2 - 4\right| \leq x + 2 \quad &\Leftrightarrow \quad |x-2|\,|x+2| \leq x+2 \\ &\Leftrightarrow \quad |x-2| \leq \frac{x+2}{|x+2|} \in \{-1, 1\} \end{aligned}$$

Da Beträge nicht-negativ sind, muss die rechte Seite der letzten Ungleichung nicht-negativ sein, d.h. $x + 2 \geq 0$ bzw. äquivalent $x \geq -2$. Wegen $x \neq -2$ dürfen wir im Weiteren sogar die Ungleichung

$$|x - 2| \leq 1$$

für $x > -2$ betrachten. Es bietet sich eine Fallunterscheidung an:

(i) $x \geq 2$: Es gilt dann $|x - 2| = x - 2$ und damit:

$$|x - 2| = x - 2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 3$$

(ii) $x < 2$: Es gilt dann $|x - 2| = 2 - x$ und damit:

$$|x - 2| = 2 - x \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq x$$

Damit ist die Lösungsmenge $M = \{-2\} \cup [2, 3] \cup [1, 2) = \{-2\} \cup [1, 3]$.

(iii) Sei wieder $x \in \mathbb{R}$. Es bietet sich wieder eine Fallunterscheidung an:

(i) $x \geq -1 \wedge |x + 1| \geq 2 \, (\Leftrightarrow x \geq 1)$: Es gilt dann $|x + 1| = x + 1$ und $||x + 1| - 2| = |x + 1| - 2 = x - 1$. Insgesamt folgt:

$$||x + 1| - 2| = x - 1 \leq x \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{wahr}$$

(ii) $x \geq -1 \wedge |x + 1| < 2 \, (\Leftrightarrow -1 \leq x < 1)$: Es gilt dann $|x + 1| = x + 1$ und $||x + 1| - 2| = 2 - |x + 1| = 1 - x$. Insgesamt folgt:

$$||x + 1| - 2| = 1 - x \leq x \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq 2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq x$$

(iii) $x < -1 \wedge |x + 1| \geq 2 \, (\Leftrightarrow x \leq -3)$: Es gilt dann $|x + 1| = -x - 1$ und $||x + 1| - 2| = |x + 1| - 2 = -x - 3$. Insgesamt folgt:

$$||x + 1| - 2| = -x - 3 \leq x \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leq 2x \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{2} \leq x$$

Wegen $-3 < -\frac{3}{2}$, ist diese Aussage nicht erfüllt.

(iv) $x < -1 \wedge |x + 1| < 2 \, (\Leftrightarrow -3 < x < -1)$: Es gilt dann $|x + 1| = -x - 1$ und $||x + 1| - 2| = 2 - |x + 1| = 2 - (-x - 1)$. Insgesamt folgt:

$$||x + 1| - 2| = 3 + x \leq x \quad \Leftrightarrow \quad 3 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{falsch}$$

Die Lösungsmenge ist demnach $M = [1, \infty) \cup [\frac{1}{2}, 1) = [\frac{1}{2}, \infty]$.

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten die beiden Fälle $x - y \geq 0$ und $x - y < 0$.

1. Fall: $x \geq y$. Dann ist $|x - y| = x - y$, und es gilt

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y + x - y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \max\{x, y\},$$
$$\frac{x + y - |x - y|}{2} = \frac{x + y - (x - y)}{2} = \frac{2y}{2} = y = \min\{x, y\}.$$

2. Fall: $x < y$. Dann ist $|x - y| = -(x - y) = -x + y$, und es gilt

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y - x + y}{2} = \frac{2y}{2} = y = \max\{x, y\},$$
$$\frac{x + y - |x - y|}{2} = \frac{x + y + x - y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \min\{x, y\}.$$

Aufgabe 3: Mit quadratischer Ergänzung erkennen wir

$$x^2 - x + 2 = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}.$$

Wegen $(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{4} \in A$ folgt

$$\min A = \inf A = \frac{7}{4}.$$

Jetzt zeigen wir, dass $\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$ nach oben unbeschränkt ist. Dazu nehmen wir an, dass $\Gamma > 0$ eine obere Schranke für A ist, d.h.

$$x^2 - x + 2 \leq \Gamma \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aber für $x = \sqrt{\Gamma} + \frac{1}{2}$ haben wir

$$x^2 - x + 2 = \Gamma^2 + \frac{7}{4} > \Gamma,$$

Widerspruch! Folglich existieren Maximum und Supremum von A nicht.

Die Menge $B := \{x + \frac{1}{x} \mid 0 < x \leq 42\}$ ist nicht nach oben beschränkt. Wäre nämlich Γ eine obere Schranke von B, so müsste für alle $x \in (0, 42]$

$$x + \frac{1}{x} \leq \Gamma$$

gelten. Insbesondere könnten wir dann $x = \frac{1}{n} \in (0, 42]$ einsetzen und erhielten $\frac{1}{n} + n \leq \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Erst recht hätten wir dann $n \leq \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch dazu, dass $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist. Somit existieren weder Supremum noch Maximum von B.
Die Menge B ist aber nach unten durch 2 beschränkt, denn für jedes $x > 0$ erhalten wir durch Multiplikation mit x

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 \geq 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 \geq 0$$

und letzteres ist offensichtlich wahr. Zudem gilt $2 \in B$ (man setze $x = 1$). Damit wissen wir: Keine Zahl > 2 kann untere Schranke von B sein. Also ist $\inf B = 2$ und wegen $2 \in B$ folgt auch $\min B = 2$.

Offenbar gilt $x^2(1 + x^2)^{-1} \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem ist $0 \in C$ (man setze $x = 0$). Damit folgt: Infimum und Minimum von C existieren, und es ist $\inf C = \min C = 0$.
Die Menge C ist nach oben durch 1 beschränkt, denn wegen $1 + x^2 > 0$ gilt

$$\frac{x^2}{1 + x^2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leq 1 + x^2.$$

Die letzte Ungleichung ist natürlich für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Wir zeigen nun, dass 1 sogar die kleinste obere Schranke ist. Sei $\Gamma < 1$ beliebig; wir wollen zeigen, dass Γ keine obere Schranke von D ist. Wir müssen also ein $x \in \mathbb{R}$ finden mit

$$\frac{x^2}{1 + x^2} > \Gamma.$$

Dies ist äquivalent zu

$$x^2 > \Gamma(1 + x^2), \quad \text{also} \quad (1 - \Gamma)x^2 > \Gamma, \quad \text{d. h.} \quad x^2 > \frac{\Gamma}{1 - \Gamma}$$

und die letzte Ungleichung ist für ein hinreichend großes x (etwa für $x = \sqrt{\frac{\Gamma}{1-\Gamma} + 1}$) offenbar erfüllt. Also ist $\sup C = 1$. Wegen $1 \notin C$ ($1 \in C \Leftrightarrow \exists x \in C$ mit $\frac{x^2}{x^2+1} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1+x^2 \Leftrightarrow 0 = 1$, Widerspruch!) existiert das Maximum von C nicht.

Aufgabe 4: Wird in den Tutorien in der Woche vom 9. bis 13.11.2015 besprochen.