Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
4.11.2015

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 3. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1:

(a) Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Wegen

$$\prod_{k=1}^{1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2 = \frac{(1+1)^1}{1!}$$

ist

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!}$$

für $n = 1$ richtig.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für dieses n gelte $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!}$ (IV). Dann folgt

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \\ &\overset{\text{(IV)}}{=} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{(n+1)^n}{n!} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\frac{(n+1)^n}{n!} \\ &= \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)\cdot n!} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

(b) Wir verwenden wieder vollständige Induktion.
IA: Für $n = 1$ stimmt die behauptete Aussage, denn $11^1 - 6 = 5$ ist durch 5 teilbar.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Fř dieses n gelte die Behauptung, sei also $11^n - 6$ durch 5 teilbar, etwa $11^n - 6 = 5l$ für ein $l \in \mathbb{Z}$. (IV)
Zu zeigen ist, dass dann auch $11^{n+1} - 6$ durch 5 teilbar ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}11^{n+1} - 6 &= 11 \cdot 11^n - 11 \cdot 6 + 11 \cdot 6 - 6 \\ &= 11 \cdot (\underbrace{11^n - 6}_{\overset{\text{(IV)}}{=} 5l}) + 60 = 5 \cdot (\underbrace{l + 12}_{\in \mathbb{Z}}).\end{aligned}$$

(c) IA: Für $n = 4$ gilt $n! = 24$ und $2^n = 16$. Also ist die behauptete Ungleichung für $n = 4$ wahr.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ beliebig. Für dieses n gelte $n! > 2^n$ (IV). Dann folgt

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \overset{\text{IV}}{>} (n+1) \cdot 2^n \overset{n \geq 4}{>} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Aufgabe 2:

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Nach Definition der Binomialkoeffizienten gilt für jedes $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} k\binom{n}{k} &= k \cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \\ &= n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}. \end{aligned}$$

Daher liefert der binomische Lehrsatz

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \overset{j:=k-1}{=} n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} \cdot 1^j \cdot 1^{(n-1)-j} \\ &= n \cdot (1+1)^{n-1} = n \cdot 2^{n-1}. \end{aligned}$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Im Fall $n = 1$ ist $\sqrt[1]{1} = 1 \leq 3 = 1 + \frac{2}{\sqrt{1}}$ erfüllt. Für $n \geq 2$ ergibt sich nach Aufgabe 2 (b) des 3. Übungsblattes

$$\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n \geq \frac{n^2}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2 = n \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \geq \sqrt[n]{n}.$$

Aufgabe 3:

(a) Wir berechnen vorbereitend:

$$|z_1| = |1+3i| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}, \qquad |z_2| = |-2+2i| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = 2\sqrt{2}$$

(i) Es gilt

$$\frac{1}{z_1} \cdot z_2 = \frac{1}{1+3i} \cdot (-2+2i) = \frac{(-2+2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{4+8i}{10} = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$$

und damit $Re\left(\frac{1}{z_1} \cdot z_2\right) = \frac{2}{5}$, $Im\left(\frac{1}{z_1} \cdot z_2\right) = \frac{4}{5}$, $\left|\frac{1}{z_1} \cdot z_2\right| = \frac{1}{|z_1|} \cdot |z_2| = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} \bar{z}_1^2 - \frac{1}{z_2^2} &= (1-3i)^2 + \frac{1}{(-2+2i)^2} \\ &= -8 - 6i - \frac{1}{8i} = -8 - 6i + \frac{1}{8}i = -8 - \frac{47}{8}i \end{aligned}$$

und damit $Re\left(\bar{z}_1^2 - \frac{1}{z_2^2}\right) = -8$, $Im\left(\bar{z}_1^2 - \frac{1}{z_2^2}\right) = -\frac{47}{8}$, $\left|\bar{z}_1^2 - \frac{1}{z_2^2}\right| = \frac{\sqrt{6305}}{8}$.

(b) (i) Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} z \in C \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z^2) > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}((x+\mathrm{i}y)^2) > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy) > 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| > \sqrt{1+y^2} \\ &\Leftrightarrow \quad x > \sqrt{1+y^2} \text{ oder } x < -\sqrt{1+y^2} \end{aligned}$$

Also gilt $C = \left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > \sqrt{1 + (\mathrm{Im}(z))^2}\right\} \cup \left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < -\sqrt{1 + (\mathrm{Im}(z))^2}\right\}$.
Siehe auch Abbildung (1).

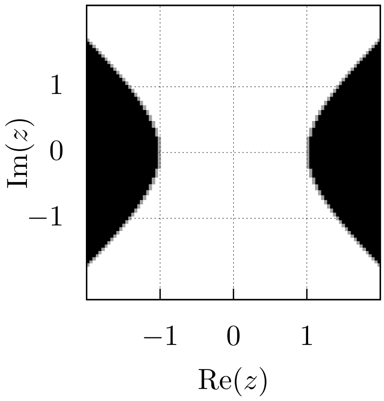

Abbildung 1: Menge C

(ii) Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} z \in D \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(z^2) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}((x+\mathrm{i}y)^2) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2xy \leq 1 \end{aligned}$$

Wir unterscheiden folgende Fälle:

- $x = 0$: In diesem Fall gilt nach Obigem $z = x + \mathrm{i}y \in D$ für jedes $y \in \mathbb{R}$.
- $x > 0$: In diesem Fall gilt nach Obigem $z = x + \mathrm{i}y \in D \Leftrightarrow y \leq \frac{1}{2x}$.
- $x < 0$: In diesem Fall gilt nach Obigem $z = x + \mathrm{i}y \in D \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{2x}$.

Also gilt:

$$\begin{aligned} D = \{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Re}(z) = 0\} &\cup \left\{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0 \text{ und } \mathrm{Im}(z) \leq \frac{1}{2\,\mathrm{Re}(z)} \right\} \\ &\cup \left\{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0 \text{ und } \mathrm{Im}(z) \geq \frac{1}{2\,\mathrm{Re}(z)} \right\} \end{aligned}$$

Siehe auch Abbildung (2).

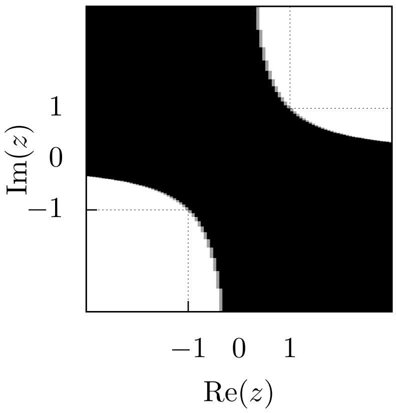

Abbildung 2: Menge D

(d) (i) Es gilt:

$$\begin{aligned} z^3+8=0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x+iy)^3+8=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3+8=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^3-3xy^2+8=0 \text{ und } 3x^2y-y^3=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^3-3xy^2+8=0 \text{ und } y(3x^2-y^2)=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^3-3xy^2+8=0 \text{ und } (y=0 \text{ oder } y=x\sqrt{3} \text{ oder } y=-x\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Wieder betrachten wir die einzelnen Fälle:

- $y=0$: Es ergibt sich
$$x^3+8=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\sqrt[3]{8}=-2$$
für $x\in\mathbb{R}$.
- $y=x\sqrt{3}$: Es ergibt sich
$$x^3-9x^3+8=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3=1 \quad \Leftrightarrow \quad x=1$$
für $x\in\mathbb{R}$. Also gibt es die Lösung $z=1+i\sqrt{3}$.
- $y=-x\sqrt{3}$: Es ergibt sich
$$x^3-9x^3+8=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3=1 \quad \Leftrightarrow \quad x=1$$
für $x\in\mathbb{R}$. Also gibt es die Lösung $z=1-i\sqrt{3}$.

Insgesamt gibt es also genau die Lösungen $z_0=-2$, $z_1=1+i\sqrt{3}$ und $z_2=1-i\sqrt{3}$.

(ii) Dem Hinweis folgend, machen wir den Ansatz $z=(1+i)x$. Einsetzen in die Gleichung liefert:

$$\begin{aligned} &((1+i)x)^3-(3-i)((1+i)x)^2-i(1+i)x+1+3i=0 \\ \Leftrightarrow \quad &(1+3i+3i^2-i)x^3-(3-i)(1+2i+i^2)x^2-i(1+i)x+1+3i=0 \\ \Leftrightarrow \quad &(-2+2i)x^3-(3-i)2ix^2-i(1+i)x+1+3i=0 \\ \Leftrightarrow \quad &-2x^3-2x^2+x+1=0 \text{ und } 2x^3-6x^2-x+3=0 \end{aligned}$$

Addieren der beiden letzten Gleichungen liefert:

$$-8x^2+4=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ oder } x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Also sind $z_0=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ und $z_1=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ zwei der gesuchten Nullstellen des Polynoms $P(z)=z^3-(3-i)z^2-iz+1+3i$. Nach dem Satz über die Polynomdivision lässt sich P durch $Q=(z-z_0)\cdot(z-z_1)=(z-\frac{1+i}{\sqrt{2}})\cdot(z+\frac{1+i}{\sqrt{2}})=\left(z^2-\frac{(1+i)^2}{2}\right)=z^2-i$ dividieren. Tatsächlich ergibt die Polynomdivision:

$$z^3-(3-i)z^2-iz+1+3i=(z^2-i)\cdot(z-(3-i))$$

Die letzte Nullstelle lautet also $z_2=(3-i)$.

Aufgabe 4:

(a) Wegen $a_n=\frac{2n}{n+1}=\frac{2}{1+\frac{1}{n}}$ vermuten wir, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n\to\infty$ gegen 2 konvergiert. Für jedes $n\in\mathbb{N}$ ist

$$|a_n-2|=\left|\frac{2n-2(n+1)}{n+1}\right|=\frac{2}{n+1}.$$

Daher ergibt sich

$$|a_n - 2| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{n+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{2}{\varepsilon} - 1.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $n_0(\varepsilon) > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. Wie eben gesehen, gilt dann $|a_n - 2| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0(\varepsilon)$. Also konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 2.

Ist $\varepsilon = 10^{-10}$, so kann man beispielsweise $n_0(\varepsilon) = 2 \cdot 10^{10} > 2 \cdot 10^{10} - 1 = \frac{2}{\varepsilon} - 1$ nehmen. Damit gilt $|a_n - 2| < 10^{-10}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2 \cdot 10^{10}$.

(b) Mit Hilfe der binomischen Formel $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, $a, b \in \mathbb{R}$, erhält man für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Da $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$, vermuten wir, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Obigem $|a_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \varepsilon$ ist erfüllt, wenn

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{4\varepsilon^2} = \frac{1}{4} \cdot 10^{20}.$$

Mit $n_0(\varepsilon) = 10^{20} > \frac{1}{4} \cdot 10^{20} = \frac{1}{4\varepsilon^2}$ gilt dann $|a_n - 0| < 10^{-10}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 10^{20}$.