Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
11.11.2015

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 4. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1: Etwa folgende Folgen erfüllen das Verlangte:

i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 7 + (-1)^n \cdot 6$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = 0$ für gerade n und $b_n = n$ für ungerade n.

iii) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = (-1)^n n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

iv) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = 2015 + \frac{(-1)^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2: Wir zeigen zunächst mit vollständiger Induktion, dass $0 < a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
IA: Nach Voraussetzung ist $0 < a < 1$. Daher gilt $a_1 := \frac{1}{2}a \in (0, \frac{1}{2}) \subset (0,1)$.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $0 < a_n < 1$ (IV).
Es ist $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a + a_n^2) \geq \frac{1}{2}a > 0$ (dazu brauchen wir die Induktionsvoraussetzung gar nicht).
Aus $0 < a_n < 1$ folgt $a_n^2 < 1$ und damit

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a + a_n^2) < \frac{1}{2}(a+1) < \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

Nun zeigen wir mittels vollständiger Induktion, dass $a_{n+1} - a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
IA: Es ist $a_2 - a_1 = \frac{1}{2}(a + a_1^2) - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a_1^2 = \frac{1}{2}a^2 \geq 0$.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $a_{n+1} - a_n \geq 0$ (IV).
Dann folgt

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a + a_{n+1}^2) - \frac{1}{2}(a + a_n^2) = \frac{1}{2}(a_{n+1}^2 - a_n^2) = \frac{1}{2}\underbrace{(a_{n+1} - a_n)}_{\geq 0 \text{ nach (IV)}}\underbrace{(a_{n+1} + a_n)}_{>0} \geq 0.$$

Da (a_n) monoton wächst und nach oben durch 1 beschränkt ist, konvergiert die Folge gegen einen gewissen Grenzwert $c \leq 1$. Diesen erhalten wir, indem wir in der Gleichung $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a + a_n^2)$ den Grenzübergang $n \to \infty$ durchführen. Dies liefert

$$c = \frac{1}{2}(a + c^2), \quad \text{also} \quad c^2 - 2c + a = 0, \quad \text{d. h.} \quad c_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}.$$

Da uns bereits $c \leq 1$ bekannt ist, ergibt sich $c = 1 - \sqrt{1-a}$.

Aufgabe 3:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{(2\sqrt{n}+3)^2}{(3\sqrt[3]{n}+2)^3} = \frac{\left(\sqrt{n}\left(2 + \frac{3}{\sqrt{n}}\right)\right)^2}{\left(\sqrt[3]{n}\left(3 + \frac{2}{\sqrt[3]{n}}\right)\right)^3} = \frac{n\left(2 + \frac{3}{\sqrt{n}}\right)^2}{n\left(3 + \frac{2}{\sqrt[3]{n}}\right)^3} = \frac{\left(2 + \frac{3}{\sqrt{n}}\right)^2}{\left(3 + \frac{2}{\sqrt[3]{n}}\right)^3}.$$

Wegen $2 + \frac{3}{\sqrt{n}} = 2 + 3\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \to 2$ und $3 + \frac{2}{\sqrt[3]{n}} = 3 + 2\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} \to 3 \neq 0$ für $n \to \infty$ konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach den Grenzwertsätzen gegen $\frac{2^2}{3^3} = \frac{4}{27}$.

(b) Konvergente Folgen sind, der Vorlesung nach, beschränkt. Wir zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist und damit nicht konvergent sein kann. Sei dazu $k \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$(2k)! = \underbrace{2k \cdot (2k-1) \cdot \ldots \cdot (k+1)}_{k \text{ Faktoren, jeder } \geq k} \cdot \underbrace{k \cdot \ldots \cdot 1}_{\geq 1} \geq k^k.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt damit:

$$a_{2n^2} = \sqrt[2n^2]{(2n^2)!} \geq \sqrt[2n^2]{(n^2)^{n^2}} = \sqrt[2n^2]{n^{2n^2}} = n.$$

Da die natürlichen Zahlen, laut Vorlesung, nicht nach oben beschränkt sind, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt.

(c) Der binomische Lehrsatz liefert für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$(1+n)^{42} = \sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} n^k = \alpha_0 + \alpha_1 n + \ldots + \alpha_{42} n^{42}, \quad \text{wobei} \quad \alpha_k := \binom{42}{k}.$$

Wegen $\alpha_{42} = \binom{42}{42} = 1$ ergibt sich $(1+n)^{42} - n^{42} = \alpha_0 + \alpha_1 n + \ldots + \alpha_{41} n^{41}$. Folglich ist

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \ldots + \alpha_{40} n^{40} + \alpha_{41} n^{41}}{n^{41}} \\ &= \frac{\alpha_0}{n^{41}} + \frac{\alpha_1}{n^{40}} + \ldots + \frac{\alpha_{40}}{n} + \alpha_{41} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha_{41} = \binom{42}{41} = \binom{42}{1} = 42. \end{aligned}$$

(d) Wir verwenden

$$u^m - v^m = (u-v) \sum_{k=0}^{m-1} u^{m-1-k} v^k = (u-v)(u^{m-1} + u^{m-2} v + \ldots + u v^{m-2} + v^{m-1})$$

für $m = 10$. Setzen wir $b_n := \sqrt[10]{1 + 3n^{-4} + n^{-9}}$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_n = n^4 (b_n - 1) &= n^4 \cdot \frac{b_n^{10} - 1^{10}}{b_n^9 + b_n^8 + \ldots + b_n + 1} \\ &= \frac{n^4(3n^{-4} + n^{-9})}{b_n^9 + b_n^8 + \ldots + b_n + 1} = \frac{3 + n^{-5}}{b_n^9 + b_n^8 + \ldots + b_n + 1}. \end{aligned}$$

Wegen $b_n \to 1$ folgt $a_n \to \frac{3}{10}$ $(n \to \infty)$.

(e) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{7n^7(1+\frac{1}{n!})(n^3 - n^2)}{(n^3+2)(n^5 + \sqrt{n+1})n^2} = \frac{7n^5(1+\frac{1}{n!})(n^3 - n^2)}{(n^3+2)(n^5 + \sqrt{n+1})} \\ &= \frac{7n^8(1+\frac{1}{n!})(1-\frac{1}{n})}{n^3\left(1 + 2\left(\frac{1}{n}\right)^3\right) n^5 \left(1 + \sqrt{\frac{n+1}{n^{10}}}\right)} \\ &= \frac{7(1+\frac{1}{n!})(1-\frac{1}{n})}{\left(1 + 2\left(\frac{1}{n}\right)^3\right)\left(1 + \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^9 + \left(\frac{1}{n}\right)^{10}}\right)}, \end{aligned}$$

sowie

$$0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}.$$

Nach Satz 6.3 (4) ist also $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$ und die Grenzwertsätze liefern (mit der obigen Darstellung) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 7$.

(f) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(\sqrt[n]{n})^{1/3} = \sqrt[3n]{n} \leq a_n \leq \sqrt[3n]{2n} = \sqrt[3n]{2} \cdot \sqrt[3n]{n} = (\sqrt[n]{2})^{1/3} \cdot (\sqrt[n]{n})^{1/3}.$$

Aufgrund von $\sqrt[n]{n} \to 1$ und $\sqrt[n]{2} \to 1$ für $n \to \infty$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

(g) Für jedes feste $p \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^p = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^p = 1^p = 1.$$