Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
18.11.2015

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 5. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1: Zunächst beweisen wir die Summenformel mittels vollständiger Induktion:
IA: Für $n = 1$ gilt $\sum\limits_{k=0}^{1-1} q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q^1}{1-q}$ für alle $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $\sum\limits_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$ für alle $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. (IV)
Für jedes $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ergibt sich damit

$$\sum_{k=0}^{(n+1)-1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n \overset{\text{IV}}{=} \frac{1-q^n}{1-q} + q^n \cdot \frac{1-q}{1-q} = \frac{1-q^n+q^n-q^n\cdot q}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

(a) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{(-2)^{3k-1}}{3^{2k+1}} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{(-2)^{3k}}{3^{2k}} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{((-2)^3)^k}{(3^2)^k} = -\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{8}{9}\right)^k.$$

Daher ergibt sich mit Hilfe der geometrischen Summenformel für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)^{3k-1}}{3^{2k+1}} = -\frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{8}{9}\right)^k = -\frac{1}{6}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{8}{9}\right)^k - 1\right) = -\frac{1}{6}\left(\frac{1-(-8/9)^{n+1}}{1-(-8/9)} - 1\right).$$

Wegen $|-8/9| < 1$ ist $(-8/9)^{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$. Also konvergiert (s_n) gegen

$$\lim_{n\to\infty} s_n = -\frac{1}{6}\left(\frac{1-0}{1-(-8/9)} - 1\right) = -\frac{1}{6}\left(\frac{9}{9+8} - \frac{17}{17}\right) = \frac{4}{51}.$$

(b) Nach Definition von e und σ_n gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} e - \sigma_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right) \\ &< \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} - 1\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{n+1}{n} - 1\right) = \frac{1}{n \cdot n!}; \end{aligned}$$

damit ist die Abschätzung von σ_n nach unten gezeigt. Weiter gilt

$$e - \sigma_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} > \frac{1}{(n+1)!}\,,$$

womit auch die Abschätzung nach oben bewiesen ist.

Aufgabe 2:

(i) Für alle $n \geq 3$ gilt $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ und daher $(\frac{1}{2} + \frac{1}{n})^n \leq (\frac{5}{6})^n$. Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{5}{6})^n$ ist also eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2} + \frac{1}{n})^n$. Nach dem Majorantenkriterium ist $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2} + \frac{1}{n})^n$ absolut konvergent.

(ii) Wir wissen, dass $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ gilt. Daher ist die Folge $(\sqrt[n]{n})$ beschränkt, d.h. es gibt eine Konstante C so, dass $\sqrt[n]{n} \le C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Hiermit erhalten wir

$$n^{-1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \ge \frac{1}{Cn}\,.$$

Da die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist, folgt die Divergenz der zu untersuchenden Reihe aus dem Minorantenkriterium.

(iii) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$b_n := \sqrt[n]{\left|\frac{n}{n+1}\right|^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}.$$

Deswegen gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{e} < 1$$

Folglich ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ nach dem Wurzelkriterium absolut konvergent.

(iv) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$. Offenbar ist $a_n > 0$ und es gilt

$$b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} = (n+1)\cdot\frac{1}{2n+1} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}.$$

Wegen $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$ folgt mit dem Quotientenkriterium, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$ absolut konvergent ist.

(v) Für $0 < a < 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 < \sqrt[n]{a} < 1$, $0 < \sqrt[n+1]{a} < 1$. Deshalb gilt

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n+1]{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n+1}} = \sqrt[n+1]{a\sqrt[n]{a}} < \sqrt[n+1]{a\cdot 1} = \sqrt[n+1]{a}$$

und folglich ist $(1-\sqrt[n]{a})_{n\in\mathbb{N}}$ (streng) monoton fallend. Ferner ist $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$. Nach dem Leibniz-Kriterium ist die alternierende Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\sqrt[n]{a})$ konvergent.

Erinnerung (*dritte binomische Formel*): Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\alpha^n - \beta^n = (\alpha-\beta)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{n-1-k}\cdot\beta^k \tag{1}$$

Einsetzen von $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt[n]{a}$ und umstellen nach $\alpha - \beta$ liefert:

$$\left|(-1)^n(1-\sqrt[n]{a})\right| = 1-\sqrt[n]{a} = \frac{1-a}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\underbrace{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k}_{\le 1}} \ge \frac{1-a}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}1} = (1-a)\cdot\frac{1}{n}$$

Da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-a}{n} = (1-a)\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergent ist, liefert das Minorantenkriterium zusammen mit der obigen Abschätzung, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\sqrt[n]{a})$ *nicht* absolut konvergent ist.

Aufgabe 3: Sei $a_n = \frac{(1+\frac{1}{2}(-1)^n)^n}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Betrachte die Folge $(b_n) := \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. Für ihre Teilfolgen (b_{2n}) bzw. (b_{2n+1}) gilt

$$\begin{aligned} b_{2n} &= \frac{(2n)^2}{(2n+1)^2} \cdot \frac{(1-\frac{1}{2})^{2n+1}}{(1+\frac{1}{2})^{2n}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \\ b_{2n+1} &= \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} \cdot \frac{(1+\frac{1}{2})^{2n+2}}{(1-\frac{1}{2})^{2n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n+1}}\right)^2 \cdot 3^{2n+2} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} b_{2n} = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_{2n+1} = \infty$ gilt $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty > 1$. Eine Entscheidung mit dem Quotientenkriterium ist also nicht möglich.

(b) Betrachte die Folge $(b_n) := \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$. Für ihre Teilfolge (b_{2n}) gilt:

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}}{\left(\sqrt[2n]{2n}\right)^2} = \frac{3}{2}$$

Also gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{3}{2} > 1$. Nach dem Wurzelkriterium folgt die Divergenz von $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Aufgabe 4: Wegen $i^4 = (-1)^2 = 1$ gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$i^{4m-3} = i, \qquad i^{4m-2} = -1, \qquad i^{4m-1} = -i, \qquad i^{4m} = 1.$$

Folglich erhalten wir für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{4N} \frac{i^n}{n} &= \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{i^{4m-3}}{4m-3} + \frac{i^{4m-2}}{4m-2} + \frac{i^{4m-1}}{4m-1} + \frac{i^{4m}}{4m}\right) \\ &= i \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{1}{4m-3} - \frac{1}{4m-1}\right) + \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{1}{4m} - \frac{1}{4m-2}\right) \\ &= i \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots + \frac{1}{4N-3} - \frac{1}{4N-1}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{6} + - \ldots + \frac{1}{4N} - \frac{1}{4N-2}\right) \\ &= i \sum_{k=1}^{2N} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{2N} (-1)^k \frac{1}{2k}. \end{aligned}$$

Da $(\frac{1}{2k-1})_k$ bzw. $(\frac{1}{2k})_k$ monoton fallende Nullfolgen sind, konvergieren diese Summen für $N \to \infty$ nach dem Leibnizkriterium. Damit wissen wir: Wenn wir mit s_N die N-te Partialsumme der zu untersuchenden Reihe bezeichnen, dann konvergiert s_{4N} für $N \to \infty$. Für $m \in \{1, 2, 3\}$ gilt

$$s_{4N+m} = s_{4N} + \sum_{n=4N+1}^{4N+m} \frac{i^n}{n} \xrightarrow{N\to\infty} \lim_{N\to\infty} s_{4N}$$

wegen $\left|\frac{i^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$. Folglich konvergiert s_N für $N \to \infty$, d.h. die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ konvergiert. Sie ist aber nicht absolut konvergent, weil die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{i^n}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.