Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
25.11.2015

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 6. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1: Sei $q \in (0,1)$. Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist absolut konvergent. Nach 7.10 gilt

$$\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} q^k q^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(q^n \sum_{k=0}^{n} 1\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n.$$

Diese Reihe ist als Cauchyprodukt absolut konvergenter Reihen ebenfalls absolut konvergent. Indem man das Cauchyprodukt dieser Reihe mit $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ bildet, ergibt sich

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 \cdot \frac{1}{1-q} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)q^k q^{n-k}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(q^n \sum_{k=0}^{n}(k+1)\right)\end{aligned}$$

Mittels vollständiger Induktion können wir zeigen, dass $\sum\limits_{k=0}^{n}(k+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Folglich ist

$$\frac{1}{(1-q)^3} = \left(\frac{1}{1-q}\right)^2 \cdot \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(n+1)(n+2)q^n.$$

Für die gegebene Reihe erhalten wir daher

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)q^n = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Aufgabe 2: Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n!} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)+i\sin(nx)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{ix})^n}{n!}\\ &= e^{(e^{ix})} = e^{\cos(x)+i\sin(x)} = e^{\cos(x)}e^{i\sin(x)}\\ &= e^{\cos(x)}\left[\cos(\sin(x)) + i\sin(\sin(x))\right]\\ &= e^{\cos(x)}\cos(\sin(x)) + i\,e^{\cos(x)}\sin(\sin(x)).\end{aligned}$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil ergibt die Identitäten

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n!} = e^{\cos(x)}\cos(\sin(x)) \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n!} = e^{\cos(x)}\sin(\sin(x)).$$

Aufgabe 3:

(a) Sei $a_n := n!$ für alle $n \geq 0$. Offenbar gilt $a_n > 0$ für alle $n \geq 2$. Wir können daher versuchen, den Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Hilfe des Satzes 7.15 (Folgerung aus dem Quotientenkriterium) zu bestimmen. Es gilt für $z \neq 0$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{n!} = (n+1).$$

Dieser Ausdruck strebt für $z \neq 0$ gegen ∞. Also konvergiert die Reihe nur für $z = 0$.

(b) Die Reihe hat die Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit

$$a_n = \begin{cases} 2^m & \text{falls } n = m^2 \text{ für ein } m \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Folglich gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{m\to\infty} \sqrt[m^2]{|a_{m^2}|} = \limsup_{m\to\infty} \sqrt[m^2]{2^m} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{2} = 1$$

Nach der Formel von Cauchy-Hadamard ist $R = \frac{1}{1} = 1$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ ist $(|a_n z^n|)_{n\in\mathbb{N}} = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge. Deshalb ist in diesem Fall $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ divergent.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} &\overset{m=n-1}{=} \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{2m+1} \\ &= x\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}x^{2m} \overset{y=x^2}{=} \sqrt{y}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\underbrace{\frac{(-1)^m}{2m+1}}_{=:a_m}y^m.\end{aligned}$$

Da $a_m \neq 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$, versuchen wir wieder den Konvergenzradius R mit Hilfe des Satzes 7.15 zu bestimmen. Es gilt

$$\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \frac{2m+1}{2(m+1)+1} = \frac{2m+1}{2m+3} \to 1, \quad m\to\infty.$$

Folglich ist $R = \frac{1}{1} = 1$.
Da $y = x^2 > 0$, müssen wir nur den Fall $y = 1$ untersuchen. Da $b_m = \frac{1}{2m+1}$ eine Nullfolge ist, folgt mit dem Leibnizkriterium, dass die Reihe $\sqrt{y}\cdot\sum\limits_{m=0}^{\infty}(-1)^m b_m y^m$ konvergent ist, und somit konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ für $|x| = 1$.

(d) Sei $a_n := \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Offensichtlich ist $a_n > 0$ für $n \geq 1$ und wir verwenden wieder Satz 7.15, um den Konvergenzradius zu bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{e}\right)^n\cdot n!\left(\frac{e}{n}\right)^n = \frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ &= \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e}\cdot e = 1, \quad n\to\infty.\end{aligned}$$

Folglich ist $R = \frac{1}{1} = 1$.
Für $x = 1$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

und diese Reihe divergiert, da

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n \overset{Hinweis}{\geq} \frac{1}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{1-n}}\left(\frac{n}{e}\right)^n = \frac{1}{e\sqrt{n}} \geq \frac{1}{en}$$

und die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{en} = \frac{1}{e} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist.
Für $x = -1$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

Sei $b_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend, da

$$\begin{aligned}
\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{n+1}{e}\right)^n \cdot n! \left(\frac{e}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\
&= \frac{1}{e} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{e} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{n \cdot n \cdots n} \\
&\leq \frac{1}{e} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{e} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{e} \cdot e = 1.
\end{aligned}$$

Mit dem Hinweis zeigen wir, dass $b_n \to 0, n \to \infty$. Es gilt

$$b_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n < \frac{1}{2n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} \left(\frac{n}{e}\right)^n = \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Nach dem Leibnizkriterium konvergiert also die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ in $x = -1$.

Aufgabe 4:

(i) Es gilt

$$\begin{aligned}
(0.671875)_{10} &= \frac{6}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \frac{7}{10^5} + \frac{5}{10^6} = \frac{6 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5}{10^6} \\
&= \frac{\frac{671875}{15625}}{64} = \frac{43}{64} = \frac{1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1}{2^6} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} = (0.101011)_2.
\end{aligned}$$

(ii) Hier gilt

$$\begin{aligned}
(0.173)_8 &= \frac{1}{8} + \frac{7}{8^2} + \frac{3}{8^3} = \frac{1 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 3}{512} = \frac{123}{512} = \frac{246}{1024} \\
&= \frac{0 \cdot 4^4 + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4 + 2}{4^5} = \frac{0}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{2}{4^5} = (0.03312)_4.
\end{aligned}$$