Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
2.12.2015

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 7. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1: Eine Teilmenge $U \subseteq F$ ist Untervektorraum von F genau dann, wenn

(i) $U \neq \emptyset$

(ii) für alle $f, g \in U, \alpha \in \mathbb{K}$ gilt $f + g \in U$ und $\alpha f \in U$.

(a) (i) Definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 4$. Dann ist $f \in A$, denn $f(x) = 4 \geq 0 \, \forall x$.

(ii) Seien $f, g \in A$. Dann ist $(f+g)(x) = \underbrace{f(x)}_{\geq 0} + \underbrace{g(x)}_{\geq 0} \geq 0$ und deshalb $f + g \in A$ erfüllt.
Seien $f(x) = x^2$ und $\alpha = -1$. Dann gilt $\alpha f(x) = -x^2 < 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$, d.h. $\alpha f \notin A$.
Folglich ist A kein Untervektorraum von F.

(b) (i) Definiere wieder $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 4$. Dann gilt $f(7) = 4 = f(1)$, d.h. $B \neq \emptyset$.

(ii) Seien jetzt $f, g \in B$. Dann ist $(f+g)(7) = f(7) + g(7) = f(1) + g(1) = (f+g)(1)$ und deswegen auch $f + g \in B$.
Seien $f \in B$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann ist auch $\alpha f \in B$, denn $(\alpha f)(7) = \alpha f(7) = \alpha f(1) = (\alpha f)(1)$.
Folglich ist B ein Untervektorraum von F.

(c) (i) Definiere $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$. Dann ist $id \in C$, denn $id(-x) = -x = -id(x)$.

(ii) Für $f, g \in C$ gilt $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f+g)(x)$ und $f + g \in C$.
Seien jetzt $f \in C$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann gilt $(\alpha f)(-x) = \alpha f(-x) = \alpha(-f(x)) = -\alpha f(x) = -(\alpha f)(x)$ und deswegen $(\alpha f) \in C$.
Folglich ist C ein Untervektorraum von F.

(d) (i) Die Funktion $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ ist offensichtlich bijektiv, d.h. $D \neq \emptyset$.

(ii) Betrachte die Funktionen $f(x) = -x$ und $g(x) = x^3$. Beide sind bijektiv, daher $f, g \in D$. Aber die Funktion der Summe $(g+f)(x) = x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ hat 3 unterschiedliche Nullstellen und kann deswegen nicht injektiv und damit nicht bijektiv sein.
D ist gegenüber allen Skalaren außer der 0 abgeschlossen, da $0 \cdot f = 0$ für alle Funktionen f gilt und die Funktion $0(x) = 0$ nicht bijektiv ist.
Folglich ist D kein Untervektorraum von F.

Aufgabe 2:

(a) Wegen $x^2 + 2x - 15 = (x-3)(x+5)$ ist dieser Ausdruck für $x \in [-7, -5]$ nichtnegativ, x^3 hingegen negativ, also gilt $f(x) = x^3$ für $x \in [-7, -5]$. Für $x \in [0, 3]$ ist $(x-3)(x+5) \leq 0$ und $x^3 \geq 0$, also gilt $f(x) = x^2 + 2x - 15$ für $x \in [0, 3]$. Für $x \in [-1, 0)$ ist $x^3 \in [-1, 0)$, aber $x^2 + 2x - 15 \leq 1 + 0 - 15 = -14$, also gilt $f(x) = x^2 + 2x - 15$ für $x \in [-1, 0)$. Insgesamt ist

$$f \colon [-7, 3] \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \begin{cases} x^3 & \text{für } x \in [-7, -5], \\ x + 5 & \text{für } x \in (-5, -1), \\ x^2 + 2x - 15 & \text{für } x \in [-1, -3]. \end{cases}$$

Das Minimum zweier stetiger Funktionen g und h ist als Komposition stetiger Funktionen stetig: $\min\{g,h\} = \frac{g+h-|g-h|}{2}$ (vgl. Aufgabe 2 (b) vom 2. Tutoriumsblatt). Daher ist f jedenfalls außerhalb $\{-5,-1\}$ stetig. Da $x^2+2x-15$ und $x+5$ in -1 nicht denselben Wert annehmen sowie x^3 und $x+5$ an der Stelle -5 verschieden sind, ist f an jenen Stellen auch nicht stetig.

(b) (i) Da f für alle $x \in D \setminus \{2\}$ stetig ist, reicht es $f(2) = y_0$ so zu wählen, dass $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = y_0$ gilt. Da $x = 2$ eine Nullstelle des Polynoms $8 - x^3$ ist, lässt es sich nach Satz 5.5 (Polynomdivision) durch den Linearfaktor $(x-2)$ teilen. Wir erhalten:

$$8 - x^3 = (x-2)\cdot(-x^2-2x-4)$$

Damit gilt für alle $x \in D \setminus \{2\}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3}\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2-x}\cdot\left(1 - \frac{12}{x^2+2x+4}\right) \\ &= \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2-x}\cdot\frac{x^2+2x+4-12}{x^2+2x+4} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2-x}\cdot\frac{x^2+2x-8}{x^2+2x+4}. \end{aligned}$$

Weitere Polynomdivision liefert $x^2+2x-8 = (x-2)\cdot(x+4)$ und folglich

$$f(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2-x}\cdot\frac{x^2+2x-8}{x^2+2x+4} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2-x}\cdot\frac{(2-x)(-x-4)}{x^2+2x+4} = -\frac{1}{x}\cdot\frac{(x+4)}{x^2+2x+4}.$$

Folglich muss $y_0 := \lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} -\frac{1}{x}\cdot\frac{(x+4)}{x^2+2x+4} = -\frac{1}{4}$ gewählt werden.

(ii) Da f für alle $x \in D \setminus \{0\}$ stetig ist, reicht es $f(0) = y_0$ so zu wählen, dass $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = y_0$ gilt. Für alle $x \in D \setminus \{0\}$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} &= \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n - \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n}{x\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}} \\ &\overset{\text{Index-Shift}}{=} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}x^{n+1}}{x\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}x^{n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}x^{n}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}} \end{aligned}$$

Da die Potenzreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}x^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}x^n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$ den gemeinsamen Konvergenzradius $R = \infty$ haben, definieren sie die Funktionen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}x^n, \qquad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}x^n \quad \text{und} \quad f_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach Satz 9.7 (Stetigkeit von Potenzreihen), sind f_1, f_2 und f_3 stetig. Folglich muss

$$y_0 := \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f_1(x)+f_2(x)}{f_3(x)} = \frac{f_1(0)+f_2(0)}{f_3(0)} = 2$$

gewählt werden.

Aufgabe 3:

(a) Dieser Grenzwert existiert; es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{8x^3+2x^2+1}{2x^3+7x} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(8+2x^{-1}+x^{-3}\right)}{x^3\left(2+7x^{-2}\right)}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{8+2x^{-1}+x^{-3}}{2+7x^{-2}} = \frac{8}{2} = 4\,.\end{aligned}$$

(b) Setzen wir zur Abkürzung $a := \sqrt[3]{8+x}$ und $b := 2$, so ergibt sich mit der bekannten Gleichung $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ die Darstellung

$$\sqrt[3]{8+x}-2 = \frac{(\sqrt[3]{8+x}\,)^3-2^3}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2+2\sqrt[3]{8+x}+2^2} = \frac{x}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2+2\sqrt[3]{8+x}+4}.$$

Folglich hat man

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x} = \lim_{x\to0}\frac{1}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2+2\sqrt[3]{8+x}+4} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8}\,)^2+2\sqrt[3]{8}+4} = \frac{1}{12}.$$

(c) Mit der Reihenentwicklung von $\sin x$ hat man für jedes $x\neq0$

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x} = \frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x} = \frac{x-\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots\right)}{x\cdot\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots\right)} = \frac{\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{5!}x^5+\cdots}{x^2-\frac{1}{3!}x^4+\frac{1}{5!}x^6-\cdots}$$

und hieraus folgt wegen der Stetigkeit von Potenzreihen (vgl. Satz 9.7)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{5!}x^5+\cdots}{x^3-\frac{1}{3!}x^5+\frac{1}{5!}x^7-\cdots} = \lim_{x\to0}\frac{x^3\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}x^2+\cdots\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\cdots\right)}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}x^2+\cdots}{1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\cdots} = \frac{\frac{1}{3!}}{1} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

(d) Da

$$\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{x}{x} = \lim_{x\to0^+}1 = 1$$

und

$$\lim_{x\to0^-}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x} = \lim_{x\to0^-}-1 = -1,$$

existiert $\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|}{x}$ nicht.